



Compactage par vibration des matériaux granulaires. Etude sur le comportement de l'ensemble sol-rouleau vibrant

Orang Farzaneh

► To cite this version:

Orang Farzaneh. Compactage par vibration des matériaux granulaires. Etude sur le comportement de l'ensemble sol-rouleau vibrant. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1981. Français. NNT : . tel-00523259

HAL Id: tel-00523259

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00523259>

Submitted on 4 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

0 4 4 7

NS 10 4 22 (2)

THESE

présentée

à l'École Nationale des Ponts et Chaussées

pour obtenir le diplôme de

DOCTEUR-INGÉNIEUR DE GÉNIE CIVIL

OPTION INFRASTRUCTURES

par

Monsieur Orang FARZANEH

SUJET DE LA THESE

COMPACTAGE PAR VIBRATION DES MATÉRIAUX GRANULAIRES
ÉTUDE SUR LE COMPORTEMENT DE L'ENSEMBLE
SOL-ROULEAU VIBRANT

soutenue le 11 juin 1981

devant le Jury composé de :

G. JEUFFROY	} <i>Président</i> <i>Rapporteur</i>
M. FRÉMOND	
J. BONNOT	} <i>Examineurs</i>
M. PARAMYTHIOTI	
R. SIESTRUNCK	
P. HUMBERT	} <i>Invités</i>
J.-M. MACHET	
J.-C. PARRIAUD	

EN.P.C.



DOC10614

17

17

RESUME

"COMPACTAGE PAR VIBRATION DES MATERIAUX GRANULAIRES"

"Etude sur le comportement de l'ensemble sol-rouleau vibrant"

A la suite d'une synthèse bibliographique sommaire sur le rôle de la vibration dans le compactage des matériaux granulaires, on examine les bases théoriques relatives à la schématisation du comportement de l'ensemble sol-vibrateur à l'aide des modèles à paramètres concentrés du type masse-ressort-amortisseur ; l'analyse du rôle des caractéristiques mécaniques du matériau dans le comportement vibratoire de l'ensemble sol-rouleau permet d'interpréter plusieurs constatations expérimentales antérieures (essais sur le Vibrex). Cette approche met par ailleurs en évidence l'importance de la variabilité de l'aire de contact sol-rouleau.

Les variations de l'aire de contact en fonction des caractéristiques mécaniques du matériau et de la charge statique appliquée fait l'objet d'une étude expérimentale (essais en fosse) et théorique au cours de laquelle, la recherche de modèles aux éléments finis élasto-plastiques pouvant expliquer les résultats expérimentaux permet de mieux connaître le rôle des principaux paramètres dont dépend le phénomène réel.

La dernière partie est consacrée à l'étude, par la méthode des Eléments Finis, des sollicitations dynamiques induites dans le massif de sol (supposé élastique ou visco-élastique). Afin de simuler les conditions aux limites réelles, on est amené à appliquer la méthode des "bords à amortisseurs visqueux" proposée par Lysmer et Kuhlemeyer.

REMERCIEMENTS

Que tous ceux qui m'ont apporté leur aide dans la réalisation de ce travail trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens notamment à remercier :

L'École nationale des ponts et chaussées qui m'a accueilli comme élève-chercheur et le Laboratoire central des ponts et chaussées qui a mis à ma disposition tous les moyens nécessaires au bon déroulement de ce travail.

Monsieur J.-C. Parriaud, directeur du Laboratoire central des ponts et chaussées.

M. G. Jeuffroy, professeur à l'École nationale des ponts et chaussées, qui a bien voulu accepter la charge de rapporteur et présider le jury.

M. M. Frémond, professeur à l'École nationale des ponts et chaussées, qui a bien voulu examiner ce travail et a donné ses conseils judicieux.

M. M. Paramithyoti, président-directeur général de la société Albaret,

M. R. Siestrunk, professeur à l'Université Paris VI, qui ont bien voulu examiner ce travail et participer au jury.

M. J. Bonnot, chef du département des chaussées du Laboratoire central des ponts et chaussées, directeur de recherche à l'École nationale des ponts et chaussées, membre du jury, qui m'a accueilli dans son département et a dirigé cette thèse.

M. J.-M. Machet, chargé de mission au Laboratoire central des ponts et chaussées, qui a suivi toute cette étude, donné ses remarques et conseils judicieux et a assuré la lecture et la correction du manuscrit.

L'expérimentation décrite dans cette étude a été réalisée au Centre d'expérimentations routières de Rouen. Je tiens à exprimer mes remerciements à son directeur, M. G. Morel, qui a bien voulu m'accueillir et mettre à ma disposition les moyens nécessaires, ainsi qu'à tout le personnel du C.E.R., plus particulièrement à M. Delisle pour son aide active pendant les essais.

Pour les calculs numériques, j'ai trouvé dans la section des modèles numériques au L.C.P.C. l'aide indispensable à ce travail. J'en remercie vivement M. P. Humbert, le chef de la section, ainsi que MM. A. Dubouchet, J. Oczkowski et D. Bourai pour leur accueil. Je remercie également M. A. Barbas pour sa collaboration dans l'exécution des calculs numériques du troisième chapitre ; M. R. Sanejouand, chef de la section des prospections au L.C.P.C., qui a suivi une partie de ce travail ; MM. C. Stéfani et G. Legeay pour leurs aimables conseils.

Je tiens à remercier tout particulièrement, et très sincèrement, Mme L. Jouan et Mme C. Doh, d'avoir avec patience assuré la dactylographie de cette thèse.

S O M M A I R E

	Pages
RESUME	
REMERCIEMENTS	
SOMMAIRE	
 INTRODUCTION	1
 <u>CHAPITRE 1 - ELEMENTS D'ETUDES SUR L'EFFICACITE DU COMPACTAGE PAR VIBRATION</u>	
1.1. INTRODUCTION	3
1.2. LE ROLE DE LA VIBRATION	5
1.2.1. La force dynamique appliquée	5
1.2.2. L'influence de la répétition du cycle de charge-décharge	7
1.2.3. L'influence de la vibration sur les propriétés physiques des sols pulvérulents	8
1.2.4. L'influence de la propagation des ondes de contraintes dans le sol	11
1.3. LES DOMAINES D'ETUDES SUR L'EFFICACITE DU COMPACTAGE PAR VIBRATION	12
1.4. LE PROGRAMME VIBREX	13
1.4.1. Déroulement des essais	15
1.4.2. Paramètres mesurés	"
1.4.3. Les essais réalisés	16
 <u>CHAPITRE 2 - ETUDE SUR LE COMPORTEMENT DE L'ENSEMBLE SOL-ROULEAU VIBRANT A L'AIDE DES MODELES MATHEMATIQUES. Le ROLE DU MASSIF DU SOL.....</u>	17
2.1. INTRODUCTION	"
2.1.1. Solutions analytiques	"
2.1.2. Méthode analytique approchée	18
2.1.3. Méthode des éléments finis	"
2.1.4. Modèles mathématiques à paramètres concentrés	"

2.2. CARACTERISTIQUES DES MODELES MATHEMATIQUES A PARAMETRES CONCENTRES	19
2.2.1. Modèles élastiques à un degré de liberté	20
2.2.2. Modèles visco-élastiques à un degré de liberté	"
2.2.3. Comportement sous charges harmoniques des modèles visco-élastiques	"
2.3. ETUDES SUR L'EFFICACITE DES COMPACTEURS VIBRANTS A L'AIDE DES MODELES A PARAMETRES CONCENTRES	22
2.3.1. L'objectif des études actuelles	"
2.3.2. Modèle visco-élastique à plusieurs degrés de liberté ..	24
2.4. MODELISATION DU MASSIF SEMI-INFINI DU SOL	25
2.4.1. Position du problème	"
2.4.2. Analyse de comportement dynamique du massif semi-infini élastique	"
2.4.3. Solution approximative de Reissner pour le comportement du couple vibreur-semi-espace élastique	26
2.4.4. Travaux de Quinlan et Sung	28
2.4.5. Le rôle du facteur de masses	33
2.4.6. Equation de Hsieh	34
2.4.7. Analogie de Lysmer	35
2.4.8. Vibration verticale des fondations rigides rectangulaires	39
2.4.9. Influence du substratum rigide	41
2.5. AMORTISSEMENT DE LA VIBRATION DU SYSTEME VIBRATEUR-SOL	43
2.5.1. Amortissement géométrique	"
2.5.2. Amortissement interne de sols	44
2.5.3. Amortissement interne et total du système vibrant	47
2.5.4. Conclusion	"
2.6. ANALYSE DU COMPORTEMENT DE L'ENSEMBLE SOL-ROULEAU VIBRANT - APPLICATION DES THEORIES DU MASSIF SEMI-INFINI	49
2.6.1. Les hypothèses simplificatrices relatives aux couples sols-rouleaux vibrants	50
2.6.2. Variations de l'amplitude de déplacement du rouleau en fonction du module d'élasticité et de la masse volumique du sol	51
2.6.3. Variations de la fréquence de "résonance", f_m , avec G et p.	54
2.6.4. Variation de la force dynamique d'interaction avec G et p.	57
2.6.5. Variation de la puissance dissipée avec G et p.....	58
2.6.6. Le rôle de la distribution des contraintes d'interaction	"
2.6.7. Le désaccouplage	59
2.7. CONCLUSIONS	60
 <u>CHAPITRE 3</u> ~ <u>ETUDES EXPERIMENTALES ET THEORIQUES SUR LA VARIATION DE L'AIRE DE CONTACT</u> <u>ENTRE LE ROULEAU ET LE SOL SOUS-JACENT</u>	 61
3.1. INTRODUCTION	"
3.2. L'EFFET DE ROULEMENT	62
3.3. ESSAIS EN VRAIE GRANDEUR SUR LA VARIATION DE LA LARGEUR D'EMPREINTE DE LA BILLE EN FONCTION DE LA CHARGE STATIQUE APPLIQUEE	66
3.3.1. Caractéristiques des planches expérimentales réalisées	"
3.3.2. Caractéristiques des rouleaux utilisés	67
3.3.3. Caractéristiques des matériaux utilisés	68
3.3.4. Paramètres mesurés	69
3.3.5. Moyens de mesures	"
3.3.6. Déroulement des essais	71
3.3.7. Résultats des essais	74

3.4. SOLUTION ANALYTIQUE	78
3.5. ETUDE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS DU CONTACT BILLE-SOL EN ELASTO-PLASTICITE	83
3.5.1. Introduction au programme de calcul traitant les problèmes de contact des solides élasto-plastiques	"
3.5.2. Approche numérique du problème de contact bille-sol ...	90
3.6. CONCLUSIONS	98
 <u>CHAPITRE 4 - ETUDE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES MASSIFS SEMI-INFINIS</u>	99
INTRODUCTION	99
4.1. RAPPEL SUR LA PROPAGATION DES ONDES ELASTIQUES	101
4.1.1. Propagation des ondes monodimensionnelles	"
4.1.2. Propagation des ondes dans un semi-espace élastique....	104
4.1.3. Propagation des ondes élastiques dans un milieu stratifié	109
4.2. RAPPEL SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS EN ELASTO-DYNAMIQUE	110
4.2.1. Position du problème	110
4.2.2. Cas du solide visco-élastique de Kelvin-Voigt	113
4.2.3. Méthode de résolution	114
4.3. METHODE DES "BORDS A AMORTISSEURS VISQUEUX"	117
4.4. CALCULS NUMERIQUES	125
4.4.1. Monocouche à base indéformable	"
4.4.2. Applications des bords à amortisseurs visqueux	"
a) Propagation des ondes longitudinales "monodimensionnelles"	128
b) Propagation des ondes sphériques dans un semi- espace élastique	130
4.5. CONCLUSIONS	134
 <u>CONCLUSION GENERALE</u>	135
 ANNEXE 1	139
ANNEXE 2	149
ANNEXE 3	163
BIBLIOGRAPHIE	171

I N T R O D U C T I O N

Le travail présenté ici s'insère dans le cadre des recherches menées par les Laboratoires des Ponts et Chaussées sur le compactage par vibration.

Les rouleaux vibrants ont fait l'objet depuis plus d'une dizaine d'années d'études expérimentales visant à apprécier leur efficacité et l'influence des différents paramètres. L'optique est ici très concrète : choisir au mieux les engins et leurs modalités de fonctionnement, en fonction du "cas de chantier" rencontré.

Rapidement, la nécessité est apparue de généraliser les résultats obtenus et de définir en quelque sorte des "lois". C'est la raison pour laquelle a été établi un programme d'expérimentations et d'études avec, comme outil expérimental, un rouleau vibrant à morphologie et paramètres variables, le Vibrex. Ce programme a été mené pendant plusieurs années au Centre d'Expérimentations Routières de Rouen. Dès lors, la mise au point d'outils conceptuels, supports de l'interprétation et de la généralisation des résultats, s'avérait prioritaire.

On disposait déjà de résultats des essais en laboratoire correspondant à la variation de l'indice des vides et des caractéristiques mécaniques des matériaux granulaires soumis à la vibration. Mais ces résultats ne peuvent pas être utilisés pour définir l'efficacité des rouleaux vibrants, avant que ne soient déterminés les liens qui existent entre, d'une part, les différentes grandeurs correspondant au rouleau et au "cas de chantier" et, d'autre part, les sollicitations exercées sur la surface de la couche à compacter.

On a donc étudié le comportement vibratoire des rouleaux pour mieux définir les sollicitations qu'ils engendrent : les travaux de ces dernières années, en explicitant les grandeurs force totale appliquée, puissance dissipée, etc., ont permis de dégager des idées nouvelles comme celle de désaccouplage cyclique entre le rouleau et le sol.

A la suite de ces travaux, la présente étude porte sur le rôle des caractéristiques du massif du matériau granulaire d'une part dans l'interaction entre celui-ci et le rouleau vibrant, et d'autre part dans la variation des sollicitations à l'intérieur de la couche à compacter.

Le premier chapitre rappelle le rôle de la vibration dans le compactage des matériaux granulaires ainsi que les possibilités et les limites des moyens expérimentaux et théoriques actuels d'études sur l'efficacité du compactage par vibration.

L'influence des caractéristiques mécaniques du matériau et celle de la géométrie de la surface de contact sur le comportement vibratoire de l'ensemble sol-vibrateur fait l'objet de l'étude bibliographique du chapitre 2. Les hypothèses de base et les moyens théoriques de l'assimilation du massif semi-infini (supposé élastique ou viscoélastique) par des modèles discrets (modèles à paramètres concentrés du type masse-ressort-amortisseur) ainsi que les conditions de l'application de ces théories dans le cas particulier des rouleaux vibrants sont présentées. L'examen, à l'aide des données expérimentales des théories du semi-espace et de l'analogie de Lysmer, qui établit des formules simples explicitant les coefficients du modèle discret, permet de dégager plusieurs points d'intérêt pratique : le rôle de la répartition des pressions dans l'interface, le rôle du substratum rigide, la variation irrégulière de l'amplitude de déplacement vertical du cylindre en fonction du nombre de passes, etc.

Par ailleurs, l'examen de l'"amortissement géométrique" du système sol-rouleau vibrant met en évidence l'importance de la variabilité de la surface de contact entre le cylindre et le sol, l'"empreinte", dans le comportement vibratoire de l'ensemble sol-rouleau. Pour mieux connaître les grandeurs réelles de l'empreinte et ses variations, une étude expérimentale et théorique a donc été entreprise : elle est présentée dans le chapitre 3.

Enfin, l'étude de la variation des déplacements, accélérations et contraintes dans le massif du sol soumis, à sa surface, à des charges dynamiques est abordée dans le quatrième chapitre. Après avoir étudié, à l'aide de la méthode des éléments finis, la réponse des monocouches à substratum rigide et avoir comparé les résultats numériques avec ceux des essais de Vibrex, on étudie la modélisation par éléments finis du massif semi-infini (élastique ou viscoélastique) en appliquant la méthode des "bords à amortisseurs visqueux" proposée à l'origine par Lysmer et Kuhlemeyer.

CHAPITRE 1

ELEMENTS D'ETUDES SUR L'EFFICACITE DU COMPACTAGE PAR VIBRATION

1.1 - INTRODUCTION

Compacter un matériau granulaire c'est, pour le Génie Civil :

- diminuer les déformations permanentes ultérieures du milieu compacté (tassements différés sous charges mobiles, fluage, etc.) et maintenir ainsi une géométrie pré-conçue ;
- diminuer les déformations réversibles sous charges répétées afin de limiter la fatigue des corps sollicités (couches souples de chaussées et d'aérodromes) ;
- augmenter la résistance à la rupture et l'étanchéité des structures telles que les barrages en terre et les couches bitumineuses des chaussées.

°°°

Un matériau granulaire constitue, en première approximation, un système triphasé : grains solides, eau interstitielle (bitume dans le cas des enrobés), air et vapeur d'eau.

Si dans le cas des métaux, pour augmenter la limite d'élasticité, le procédé de modification mécanique consiste à appliquer une distorsion irréversible (écrouissage), c'est essentiellement par une déformation volumique permanente (densification, compactage) que se modifient les caractéristiques physiques d'un matériau granulaire, telles que l'angle de frottement interne (ϕ), la cohésion (C), le module d'élasticité (E) et le coefficient de perméabilité (K).

Vu la faible compressibilité des grains solides et l'eau interstitielle, c'est en chassant de l'air d'un sol non saturé, ou en expulsant de l'eau, que l'on compacte un milieu granulaire. Ainsi, le compactage étant un procédé de chargement rapide, est-il impossible de compacter un sol cohésif (argile, limon) lorsqu'il est entièrement saturé.

L'état de compacité d'un sol est défini, en pratique, soit par son poids volumique sec, γ_d , soit par son indice des vides, e .

L'ensemble des recherches relatives au "compactage" des matériaux granulaires comprend deux domaines distincts :

- l'influence du compactage (dans le sens de "densification") sur les propriétés physiques du matériau (ou du milieu) compacté ;
- l'efficacité du compactage (dans le sens du "procédé de compactage").

L'efficacité d'un compacteur se définit, de manière générale, par sa capacité d'atteindre une densité sèche moyenne sur une épaisseur ou une profondeur donnée en un nombre de passes limité. Elle dépend de nombreux facteurs dont les principaux sont les suivants :

1 - Facteurs définissant le "cas de chantier" :

- la nature du matériau,
- la teneur en eau,
- l'épaisseur de la couche à compacter,
- la rigidité du sol support.

2 - Paramètres de construction des rouleaux :

a) rouleaux statiques (non vibrants) :

- la charge statique appliquée au sol par chaque bille ($M_1 g$)
- la longueur de la bille (L) et son diamètre (ϕ),

b) rouleaux vibrants - Fig. 1.1 :

- le moment d'excentricité ($m_e e$),
- la masse de la bille (M_0),
- la masse correspondant au poids du châssis qui pèse sur la bille ($M_1 - M_0$) ;
- la longueur de la bille (cylindre) et son diamètre,
- les propriétés mécaniques de la liaison entre la bille(cylindre) et le châssis.

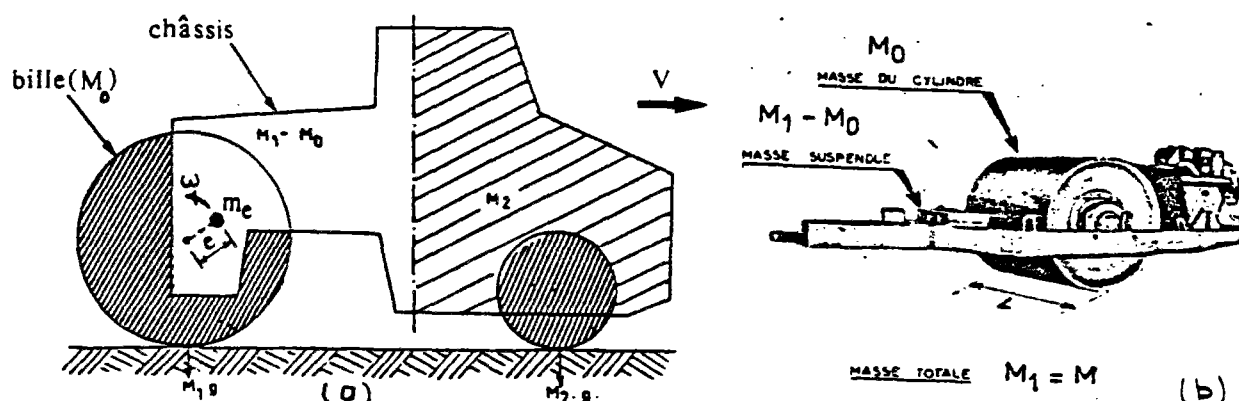


Fig. 1.1 - Rouleaux vibrants : a) rouleau automobile ; b) rouleau tracté.

* Dans ce qui suit nous nous limiterons aux compacteurs à cylindre (rouleaux) et aux matériaux non traités.

3 - Paramètres d'utilisation (ou de fonctionnement) des rouleaux :

On désigne par ce terme :

- la vitesse d'avancement (V),
- le nombre de passes (N),
- la fréquence de vibration (f ou $\omega = 2\pi f$).

On note la multiplicité des facteurs gouvernant l'efficacité du compactage par vibration superficielle. Elle se traduit, en pratique, par une grande diversité de conceptions des compacteurs vibrants.

Etudier l'efficacité du compactage par vibration c'est, en définitive, déterminer l'influence sur le rendement du compactage des paramètres ci-dessus et pour cela il faut tout d'abord déterminer le rôle de la vibration, c'est-à-dire l'influence sur l'efficacité de compactage de la rotation des balourds à l'intérieur de la bille.

1.2 - LE ROLE DE LA VIBRATION

Du point de vue technique, l'introduction de la vibration dans le compactage par vibration superficielle des matériaux granulaires permet de compacter des couches plus épaisses de matériaux difficiles à compacter, tels que les graves concassées, en assurant une meilleure compacité au fond de la couche et cela sans augmenter le poids total du matériel. Les raisons principales de ce gain de l'efficacité technique sont les suivantes :

- l'application au sol de la charge dynamique, qui est une fonction de la force centrifuge, $m_e \omega^2$.
- l'introduction d'un grand nombre de cycles de charge-décharge.
- la modification des propriétés mécaniques du matériau soumis à la vibration.
- l'introduction de nouveaux chemins de contraintes, qui résulte de la propagation des ondes de contraintes dans le massif de sol.

1.2.1 - La force dynamique appliquée

Le rôle le plus important de la rotation de(s) masse(s) excentrique(s), dans le compactage par les compacteurs vibrants (rouleaux et plaques), c'est sans doute l'application au sol de la force dynamique appelée "force vibrogène". Cette force constitue, en effet, l'interaction du couple sol-compacteur vibrant et son amplitude dépend des caractéristiques à la fois du matériel et du massif sous-jacent. L'amplitude de la force dynamique d'interaction des rouleaux vibrants atteint plusieurs dizaines de kilonewtons et dépasse parfois la charge statique appliquée, $M_1 g$. Dans ce dernier cas, la bille décolle du sol pendant une partie de chaque période de la vibration (désaccouplage). La Fig. 1.2 schématise la variation dans le temps de la force totale appliquée au sol, c'est-à-dire la résultante des forces statiques et dynamiques dans les deux cas : a) la force dynamique est inférieure à la force statique ; b) la force dynamique dépasse la force statique.

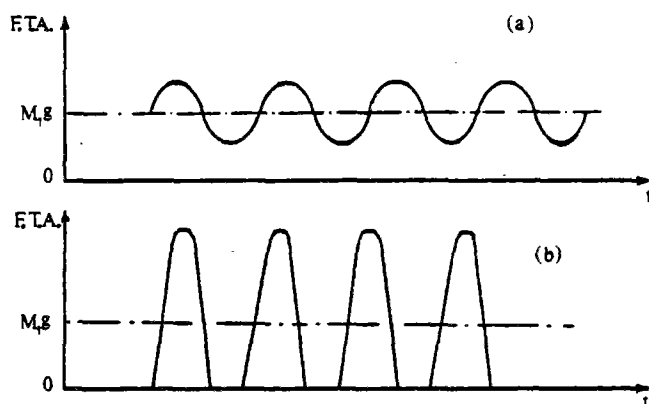


Fig. 1.2 - Variation dans le temps de la force totale appliquée au sol :
a) compactage couplé ; b) compactage désaccouplé.

Pour chaque élément volumique du sol sollicité, le compactage, c'est-à-dire la déformation volumique irréversible $-(\epsilon_1^p + \epsilon_2^p + \epsilon_3^p)/3$ dépend du tenseur de contraintes, celui-ci étant fonction de la force totale appliquée à la surface du massif. Le tenseur de contraintes résultant se décompose en tenseur isotrope, qui fait croître la densité et en tenseur déviatoire qui peut faire augmenter ou diminuer la densité suivant que la densité "initiale" est inférieure ou supérieure à la densité critique correspondant à la pression isotrope de l'élément ;

Fig. 1.3.

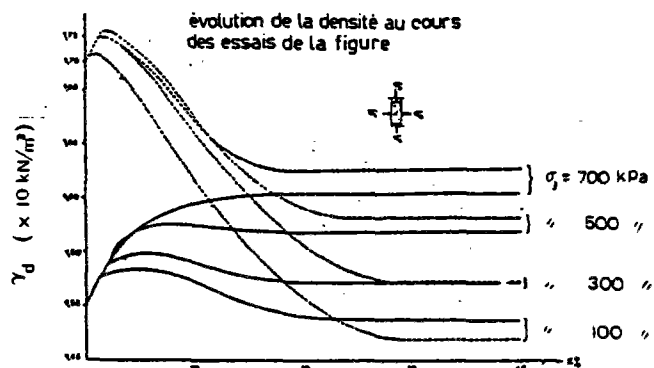
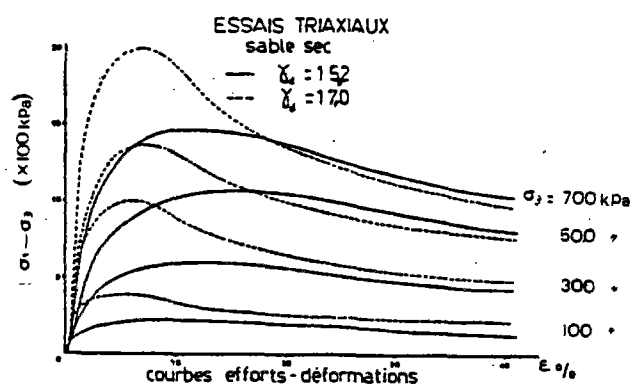
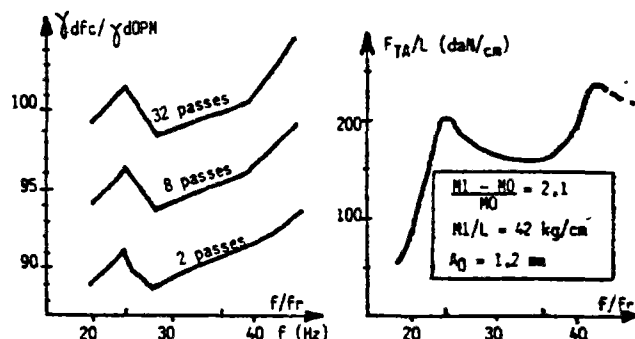


Fig. 1.3 - Evolution de la densité au cours d'un essai triaxial classique (d'après Al. Issa-Biares-Gresillon ; cité dans [87]).

Les résultats des essais en vraie grandeur, réalisés au Centre d'Expérimentation Routière (C.E.R.) de Rouen, montrent qu'en effet la densité sèche moyenne, ainsi que celle en fond de couche, augmentent lorsque la force totale appliquée ou, plus précisément, la force dynamique d'interaction augmente et vice-versa. Les courbes de la Fig. 1.4 correspondent au compactage par un rouleau vibrant (Vibrex) de la couche de 30 cm d'une grave concassée.

Fig. 1.4 - Parallèle force totale appliquée/densification en fond de couche, en fonction du choix de la fréquence (d'après Quibel[70]).



Du point de vue théorique, la variation de la force vibrogène, et plus généralement de la force totale appliquée, en fonction des paramètres vibratoires et notamment des paramètres relatifs aux compacteurs, a été étudiée par Machet (1976)[60] et Machet et Sanéjouand (1980)[61].

1.2.2 - L'influence de la répétition du cycle de charge-décharge.

Les essais en laboratoire montrent que la densité du sol augmente avec le nombre de cycles d'application de la charge. Comme on le constate sur la Fig. 1.5, au cours d'un essai de cisaillement simple (cyclique) le volume d'échantillon de sable diminue avec le nombre de cycles.

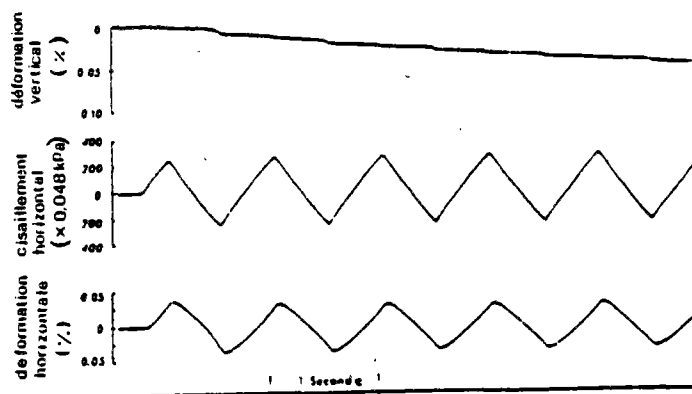
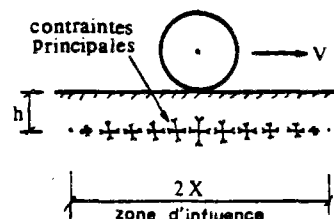


Fig. 1.5 - Variation de la déformation verticale permanente avec le nombre de cycles au cours d'un essai de cisaillement simple cyclique ; (d'après Silver et Seed[82]).

Par rapport au compactage statique, le nombre de cycles de chargements engendré par la vibration de la bille se multiplie par une valeur proportionnelle d'une part à la fréquence de vibration, et d'autre part à l'inverse de la vitesse d'avancement du compacteur. Autrement dit, le nombre de cycles de chargement d'un élément du sol correspondant à une passe du compacteur sera approximativement égal à $\frac{2xf}{v}$, x étant la distance maximale entre l'élément considéré et l'axe vertical de la bille pour laquelle la sollicitation dynamique subie par l'élément pourrait être considérée comme significative (Fig. 1.6).

Fig. 1.6 - Contraintes principales en un instant donné (schéma imaginé).



1.2.3 - L'influence de la vibration sur les propriétés physiques des sols pulvérulents

L'autre caractéristique des matériaux granulaires non-cohésifs, est la diminution d'une part des résistances mécaniques et d'autre part de l'indice des vides des modèles réduits de ces matériaux qui sont soumis à la vibration. On trouve cette double constatation dans les essais classiques de la Mécanique des Sols tels que l'essai de cisaillement simple et de consolidation dans lesquels la boîte de Casagrande ou l'oedomètre sont fixés sur une table vibrante. Quant aux essais triaxiaux, ils se déroulent sous une pression latérale cyclique.

De nombreux auteurs ont réalisé des essais pour décrire ce comportement des sols, car il concerne plusieurs domaines tels que la sismique, le tassement des fondations superficielles soumises à la vibration, l'enfoncement des pieux et le compactage par vibration. Dans ce dernier domaine les noms de Barkan (1962) [7] et D'Appolonia (1968) [24] sont assez connus. En France, plusieurs études expérimentales ont été effectuées sous la direction de J. Biarez à l'Université de Grenoble et à l'Ecole Centrale de Lyon. Citons, par exemple, le travail de Kolmayer (1970) [48] et celui de Touret (1977) [87].

a) Influence de la vibration sur la résistance au cisaillement des sables

D'après Youd et Kolmayer (Fig. 1.7) :

- la résistance "de pic" et "de palier" diminue quand l'accélération augmente ;
- la pente à l'origine diminue et le domaine élastique se retrécit quand l'accélération augmente.

En ce qui concerne les courbes intrinsèques, les résultats obtenus par différents chercheurs ne sont guère les mêmes : les résultats de Barkan [7] et Youd (1967) [97] démontrent que la courbe intrinsèque reste une droite passant par l'origine dont la pente varie avec l'amplitude d'accélération ; Fig. 1.8.

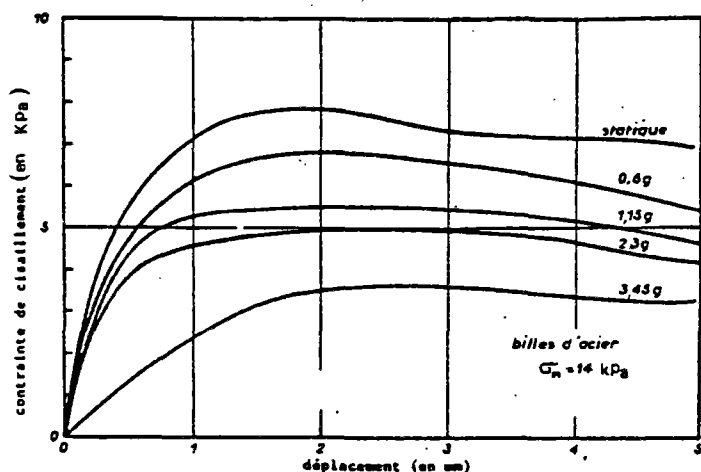


Fig. 1.7 - Influence de la vibration sur les courbes effort-déformation dans un essai de cisaillement simple (d'après Youd).

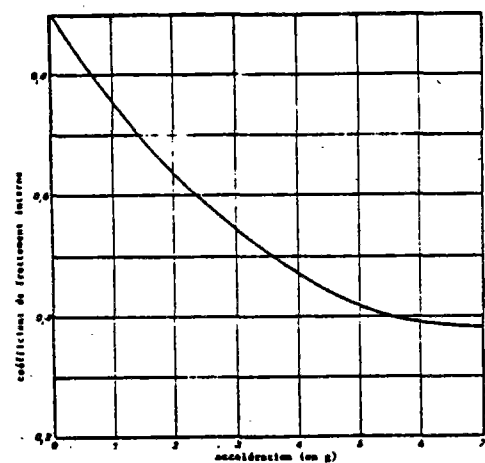


Fig. 1.8 - Relation entre le coefficient de frottement interne ($\tan \phi$) et l'accélération d'un sable (d'après Barkan).

L'Hermite et Tournon (1948) [53] n'obtiennent pas les mêmes résultats ; l'angle de frottement -mesuré uniquement au palier- varie avec la contrainte normale ; (Fig. 1.9). Kolmayer confirme les résultats de Barkan mais il constate une diminution de l'angle de frottement interne, différente de la loi de Barkan. Enfin, Ermolaev et Senin (1968) [29] obtiennent des résultats encore différents comme le montre la Fig. 1.10.

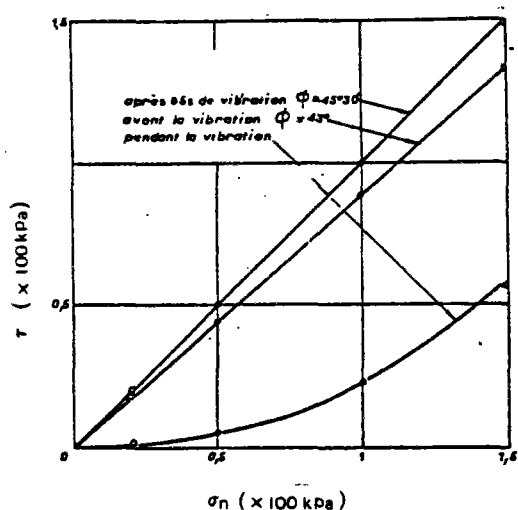


Fig. 1.9 - Influence de la vibration sur la courbe intrinsèque d'un sable (d'après L'Hermite et Tournon).

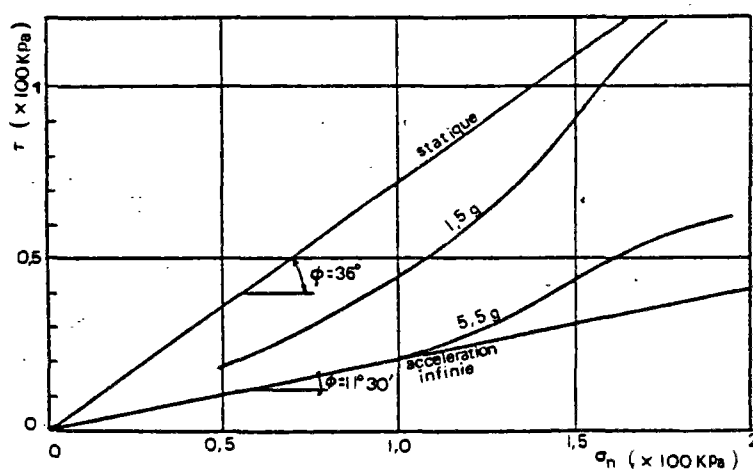


Fig. 1.10 - Variation de la courbe intrinsèque d'un sable en fonction de l'accélération (d'après Ermolaev et Senin).

b) Influence de la vibration sur la variation de l'indice des vides

Plusieurs facteurs entrent en jeu : la densité initiale du sol, les contraintes moyennes appliquées, l'amplitude de déplacement (A), la fréquence et la direction du déplacement. De nombreux auteurs ont étudié ces paramètres : tous s'accordent à dire que le plus important est l'accélération de la vibration, (Touret, [87]). La plupart des expérimentations constatent que l'indice des vides final (limite dans le temps) d'un échantillon de sable soumis à la vibration -verticale ou horizontale- diminue lorsque l'accélération augmente ; Fig. 1.11.

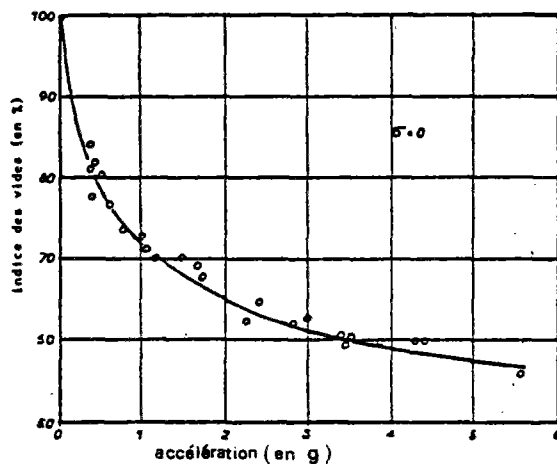


Fig. 1.11 - Variation de l'indice des vides final en fonction de l'accélération ; (d'après Selig (1963) [79]).

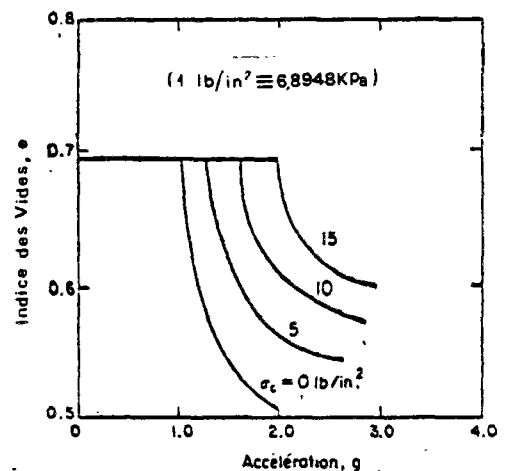


Fig. 1.12 - Relation entre l'indice des vides final et l'accélération verticale pour différentes valeurs de la surcharge verticale imposée ; (d'après Whitman et Ortigosa (1968) [95]).

Barkan énonce la loi suivante :

$$e_n = e_{\min} + (e_{\max} - e_{\min}) \text{Exp} (-\alpha \gamma)$$

où e_{\max} = indice des vides maximal

e_{\min} = indice des vides minimal pouvant être obtenu

γ = accélération

α = coefficient qui dépend de la nature du sol.

Cette formule ne met pas en évidence le fait qu'en-dessous de certaine accélération on n'observe pas de variation de densité. Aussi, Ermolaev et Senin apportent une correction :

$$e_n = e_{\min} + (e_{\max} - e_{\min}) \text{Exp} (-\alpha (\gamma - \gamma_s))$$

où, γ_s dépend à la fois de l'accélération et de la contrainte.

Ces résultats sont résumés sur les Fig. 1.12 et 1.13.

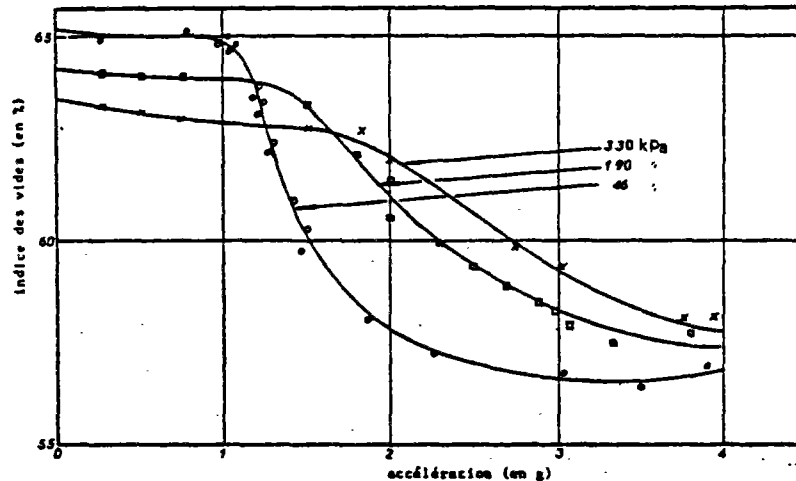


Fig. 1.13 - Variation de l'indice des vides final d'un sable en fonction de l'accélération pour différentes contraintes verticales (d'après Ermolaev et Senin).

Il convient de noter que l'utilisation de ces résultats dans la recherche de l'efficacité du compactage par vibration superficielle reste très limitée, principalement pour les raisons suivantes :

- premièrement, en présence de la vibration dans les essais sur les modèles réduits, les conditions aux limites, c'est-à-dire les caractéristiques mécaniques et géométriques de l'appareil, jouent un rôle très important dans le comportement de l'échantillon. Par conséquent, les résultats obtenus pourraient différer sensiblement d'un appareil à l'autre et même d'un mode de sollicitation à l'autre.

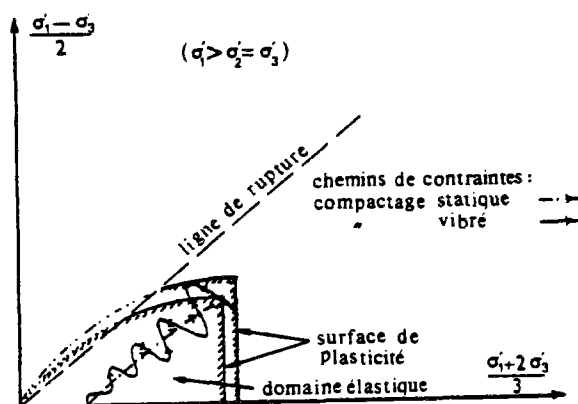
- deuxièmement, pour des accélérations -de déplacement- et des tenseurs des contraintes statiques égaux, les contraintes dynamiques imposées à l'élément considéré du massif ne sont pas nécessairement les mêmes que celles exercées sur le modèle réduit. En effet, l'accélération de tout élément du massif résulte de la propagation des déformations (et des contraintes) depuis la surface vers l'intérieur du milieu, mais celle du modèle provient du déplacement harmonique de son support (moule fixé sur une table vibrante, etc.).

1.2.4 - Influence de la propagation des ondes de contraintes dans le sol

Par rapport au compactage statique, la propagation des ondes de contraintes dans le massif du sol impose de nouveaux chemins de contraintes à tout élément, et augmente par conséquent la possibilité de déformation permanente.

Ce phénomène est schématisé par la Fig. 1.14 :

Fig. 1.14 - Chemins des contraintes d'un élément du massif de sol soumis au chargement des bille, vibrante et non vibrante ; (la forme de la surface de plasticité est inspirée de celle proposée par Vermer (1978) [91] pour un sable. Dans le but de simplification on suppose $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$.



1.3 - LES DOMAINES DE L'ETUDE DE L'EFFICACITE DU COMPACTAGE PAR VIBRATION

L'examen des principaux effets de la vibration sur le compactage superficiel nous amène à conclure que la vibration a principalement pour rôle d'introduire une force dynamique d'interaction, c'est-à-dire la force vibrogène. En effet, plus la force vibrogène est grande, plus les contraintes "totales" (dynamique + statique) et les accélérations (de déplacement) sont importantes. Il est donc admissible, à notre avis, de définir dans une première approximation l'"efficacité de la vibration" par le rapport entre l'amplitude de la force vibrogène et la puissance dissipée (par la rotation des balourds):

$$\frac{FV}{PD} = X \quad , \quad (\text{dimensions : } LT).$$

Toutefois, l'efficacité du compactage ne peut pas être expliquée uniquement par l'"efficacité de la vibration", car elle dépend des autres facteurs tels que la contrainte moyenne (qui varie, elle aussi, avec la charge statique (M_1g) et la profondeur), l'indice des vides "initial", le nombre de cycles de chargement, l'aire de contact, etc.

Cela étant, l'étude de l'efficacité de compactage par vibration pourrait s'effectuer parallèlement dans deux domaines différents :

1 - L'étude de l'interaction dynamique de l'ensemble sol-compacteur vibrant, qui vise à déterminer les variations de la force et des contraintes dynamiques appliquées à la surface du sol et celles de la puissance dissipée en fonction de divers paramètres en jeu ;

2 - L'étude du compactage (densification) de la couche compactée en fonction d'une part des sollicitations appliquées à sa surface et, d'autre part, de ses propriétés physiques ainsi que des conditions aux limites.

En ce qui concerne l'étude de l'interaction dynamique, compte tenu de l'extrême complexité du problème, les chemins à suivre sont les suivants :

- du point de vue théorique, il est indispensable de modéliser le comportement vibratoire de l'ensemble sol-compacteur vibrant à l'aide d'hypothèses simplificatrices : citons, par exemple, les modèles mathématiques relatifs aux milieux continus et au semi-espace (massif semi-infini, isotrope et homogène) élastique ou visco-élastique et le modèle à paramètres concentrés attribués au sol. Le compacteur peut être également schématisé par des modèles à paramètres concentrés.

- au plan expérimental, la présence des sollicitations dynamiques écarte toute assimilation du massif semi-infini du sol à des modèles réduits. Il faut donc réaliser des expérimentations en vraie grandeur, qui nécessitent des investissements importants et coûtent, en conséquence, assez cher.

L'étude de la densification de la couche à compacter soumise aux sollicitations du compactage nécessite, outre les outils théoriques et mathématiques ci-dessus, des essais en laboratoire sur les modèles réduits du sol pour en déterminer les lois de comportement sous charges dynamiques. Or, d'une part, la réalisation de ces essais, comme nous l'avons noté précédemment, s'avère extrêmement délicate, et d'autre part l'application de ces lois de comportement dans les études théoriques reste très difficile, même s'il s'agit des méthodes les plus efficaces, comme la méthode des Eléments Finis.

Rappelons enfin que les essais en vraie grandeur constituent à la fois le moyen et la référence nécessaires de toute étude de l'efficacité du compactage par vibration superficielle. Dans ce domaine les essais réalisés par d'Appolonia [24], [25] aux U.S.A. et par Forssblad (1965) [3], en Suède sont particulièrement riches en renseignements. Toutefois, le programme d'expérimentations le plus important, pour les rouleaux vibrants, est sans doute le Programme Vibrex, qui a été réalisé au Centre d'Expérimentations Routières de Rouen et dont les résultats des mesures n'en sont pas totalement encore interprétés. Le sous-chapitre suivant donne un aperçu de ce programme dont les détails se trouvent, entre autres, dans [71], [72] et [19].

1.4 - LE PROGRAMME VIBREX

Afin de permettre une meilleure connaissance de la technique du compactage par vibration et de connaître l'influence des différents paramètres déterminants (§ 1.1) sur la qualité du compactage (la densité sèche moyenne atteinte et son gradient en profondeur), les Laboratoires des Ponts et Chaussées ont entrepris, depuis 1973, une recherche expérimentale (Programme Vibrex). Il s'agit des essais de compactage en site propre de divers matériaux à l'aide d'un rouleau vibrant à paramètres variables. Ces essais, dans une première étape, visent à mettre en évidence et à quantifier l'influence sur la qualité du compactage :

- des principaux paramètres d'un matériel vibrant (masse vibrante, masse suspendue, moment d'excentrique, pulsation, largeur de compactage, etc.) ;
- des paramètres définissant le "cas de chantier".

On recherche donc à améliorer les méthodes d'exécution des chantiers de compactage et celles de contrôle du fonctionnement des machines ; à fournir aux constructeurs des renseignements relatifs à l'influence des paramètres de construction des engins sur le compactage des différents matériaux ; à apporter seulement des éléments nouveaux pour l'élaboration d'une (ou des) théorie(s) du compactage par vibration.

Les expérimentations ont été faites dans une des fosses du C.E.R. à l'aide d'un rouleau vibrant à paramètres variables (le Vibrex), conçu en collaboration avec la Société Albaret et construit par celle-ci. Ce rouleau dont les caractéristiques sont données ci-après permet de faire varier les principaux paramètres définissant un rouleau vibrant automobile monobille : M_0 , M_1 - M_0 , $m_e e$, f et V , ϕ , L .

Principales caractéristiques du Vibrex :

a) caractéristiques géométriques :

- longueur de la bille : 120 ou 80 cm,
- diamètre de la bille : 120 ou 150 cm.

b) paramètres de masses :

- masse totale par centimètre de génératrice ($\frac{M_1}{L}$) : variable entre 15 et 60 kg/cm,
- masse vibrante par centimètre de génératrice ($\frac{M_0}{L}$) : variable entre 15 et 28 kg/cm,
- rapport des masses ($\frac{M_1 - M_0}{M_0}$) : variable entre 0 et 3.

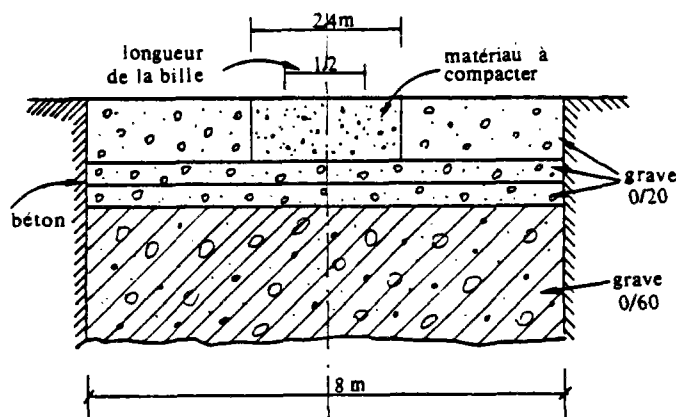
c) paramètres de vibration :

- fréquence : variable en continu entre 10 et 50 Hz,
- moment d'excentricité ($m_e e$) : variable, par valeurs discrètes, entre 0,5 et 9 mkg,
- amplitude à vide ($A_0 = \frac{m_e e}{M_0}$) : variable entre 0,2 et 6 mm,
- vitesse de translation (assurée par un arrière-train moteur sur pneus) : réglable en continu entre 0 et 5 km/h.

1.4.1 - déroulement des essais

La Fig. 1.15 indique la coupe transversale de la piste d'essais dont la longueur totale est de 25 m. Le sol-support est une grave sable-argileuse 0/60 (terrain naturel) surmontée de deux couches de grave 0/20 propre, entièrement concassée, de 20 cm d'épaisseur chacune. Afin d'éviter la ségrégation, la mise en place du sol à compacter se fait au moyen d'un répandeur automatique. Sur la longueur totale de la piste est délimitée une zone "utile" de mesures de 15 m.

Fig. 1.15 - Structure mise en place dans la fosse du C.E.R. ; [71].



1.4.2 - Les paramètres mesurés

a) Les paramètres vibratoires

A chaque passe on enregistre de façon continue les variations des différents paramètres :

- sur le rouleau :

1 - Force totale appliquée à la balle, F.T.A. ; une jauge de contrainte, collée sur le flanc de la balle en direction du rayon du flanc et insérée dans un pont de mesure, donne les valeurs relatives de la force totale appliquée.

2 - Fréquence de la vibration : un compteur électronique fixé sur le Vibrex visualise le nombre de tours par minute des balourds.

3 - Accélération verticale de la balle (mouvement relatif balle/châssis) : elle est mesurée par un accéléromètre inductif, monté sur la partie non tournante de la balle (le cadre).

4 - Amplitude de la vibration verticale de la balle : elle est mesurée par un capteur de déplacement sans contact, "CAMAN" inséré dans la chaîne de mesure.

5 - Pression hydraulique du moteur hydraulique de vibration.

6 - Vitesse d'avancement du rouleau.

Dans le sol sont enregistrées :

- la contrainte normale verticale (pression). La pression induite est mesurée, en certaines profondeurs, au moyen des capteurs résistifs en forme de cylindres métalliques dont le diamètre est environ 10 cm ;
- l'accélération induite. Elle est mesurée à l'aide des accéléromètres inductifs.

b) Les caractéristiques du matériau

A la suite de 2, 4, 8, 16, 32 et 64^{ème} passe, on mesure la teneur en eau moyenne, le gradient de teneur en eau (dans la profondeur), le poids volumique sec moyen (mesuré par un gammadensimètre à pointe, qui donne la valeur moyenne de la couche compactée); le gradient de poids volumique sec et le tassement de la couche (mesuré par nivellement).

1.4.3 - Les essais réalisés

Les résultats des planches d'essais consacrées à l'étude de l'influence des paramètres du rouleau vibrant ont fait déjà l'objet de plusieurs publications : Quibel et Froumentin (1980) [72], Quibel (1980) [70], Quibel, Froumentin et Morel (1981) [71]. Ces résultats ont été interprétés et confrontés avec les résultats des études théoriques par Machet [60] et Machet et Sanejouand [61]. Arquié, Machet et Morel (1976) [3].

Par ailleurs, plus de 55 planches d'essais ont été consacrées à l'étude des rôles des paramètres du matériau et de l'épaisseur de la couche compactée : Khay (1978) [46] et (1980) [47].

Il convient de remarquer que parallèlement au Programme Vibrex, de nombreuses planches d'essais ont été réalisées avec différents matériaux dans le but d'étudier l'efficacité de divers compacteurs vibrants (rouleaux et plaques) fabriqués en France ou ailleurs. (Voir, par exemple, les Rapports de Recherche n° 24 (1973) [20], n° 33 (1974) [20], n° 63 (1976) [62] et n° 70 (1977) [21] des Laboratoires des Ponts et Chaussées).

CHAPITRE 2

ETUDE SUR LE COMPORTEMENT DE L'ENSEMBLE SOL-ROULEAU VIBRANT A L'AIDE DES MODELES MATHEMATIQUES LE ROLE DU MASSIF DE SOL

2.1 - INTRODUCTION

Les recherches relatives au comportement de l'ensemble sol-vibrateur sont menées principalement dans trois domaines du Génie Civil :

- a) conception des fondations pour machines vibrantes,
- b) auscultation dynamique des sols et des couches de chaussées,
- c) compactage par vibration des matériaux granulaires.

Elles visent respectivement à :

- minimiser les déplacements et à éviter la résonance;
- déterminer les propriétés mécaniques et même géométriques (épaisseur de couches) des structures auscultées ;
- optimiser l'efficacité des compacteurs vibrants, en évaluant le rôle des divers paramètres concernés.

2.1.1 - Solution analytique

Compte tenu de la complexité du problème à étudier -l'analyse de l'interaction dynamique d'un système composé d'un milieu semi-infini et d'une masse vibrante qui s'appuie sur la surface du premier- il est impossible de résoudre analytiquement tous les cas rencontrés. Toutefois, en ce qui concerne le comportement sous charges dynamiques de massifs semi-infinis, de nombreuses recherches fondamentales ont abouti à des solutions analytiques qui sont calculables lorsque les charges, harmoniques, ont des répartitions relativement simples -uniforme, parabolique, etc.- et qu'elles s'appliquent dans des zones ayant des géométries élémentaires -point, ligne, bande infini, cercle, etc.

Au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, les travaux sur l'auscultation des chaussées à l'aide du vibreur Goodman [11] ont donné lieu, entre autres, à l'étude de la réponse d'un massif semi-infini, stratifié et viscoélastique, soumis à une charge vibrante à sa surface. Cette étude, entreprise par M. FREMOND [33], donne une solution analytique pour l'évaluation de la déflexion en tout point de la surface du massif stratifié et une solution numérique correspondant au cas de la charge harmonique concentrée.

2.1.2 - Méthode analytique approchée

Une solution approximative pour la détermination du comportement dynamique de l'ensemble sol-vibrateur est fournie en :

- supposant une forme simple pour la distribution de contraintes sur l'aire de contact de deux corps ;
- déterminant, par la théorie du massif semi-infini, le déplacement de l'aire chargée ;
- résolvant l'équation de l'équilibre dynamique de la masse vibrante M_0 , supposée indéformable. (Fig. 2.1).

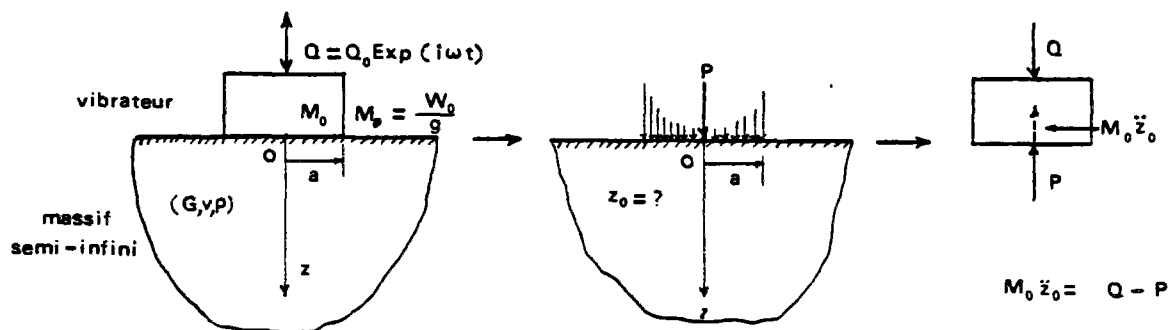


Fig. 2.1 - Schéma correspondant à l'approche analytique de la réponse du système vibrateur-massif semi-infini.

2.1.3 - Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis convient surtout lorsqu'il s'agit de conditions aux limites compliquées et de non-homogénéité du sol sollicité. En revanche elle est, actuellement, un procédé de calcul onéreux et présente certaines difficultés quant à l'assimilation du massif semi-infini à des modèles géométriquement finis et plus particulièrement lorsqu'il s'agit de la propagation des ondes de contrainte dans le massif semi-infini. Cette dernière question sera discutée au Ch. 4.

2.1.4 - Modèles mathématiques à paramètres concentrés

Les difficultés de l'application de la théorie du massif semi-infini ont amené les praticiens à employer des modèles mathématiques plus simples, comme des modèles rhéologiques dits "modèles mécaniques", composés, selon le cas, d'éléments mécaniques dont les plus utilisés sont les suivants :

- un ressort qui figure le solide de Hooke -le coefficient de Poisson n'est pas pris en compte- ;
- un amortisseur, c'est-à-dire un piston percé de trous dans un cylindre rempli d'un liquide de viscosité donnée, qui représente le liquide de Newton ;
- un patin symbolisant le solide de Saint-Venant, qui correspond au comportement rigide-plastique ;
- une masse indéformable.

Une combinaison en parallèle d'un ressort et d'un amortisseur représentera le solide de Voigt qui explique un comportement viscoélastique linéaire - Fig. 2.2.

Le frottement existant entre deux corps pourra être schématisé par le frottement de Coulomb qui est représenté par un patin [45].

Nous allons présenter quelques modèles courants en nous limitant aux cas où la force périodique appliquée est uniquement verticale -il n'y a pas de moment ni de force horizontale-.

2.2 - CARACTERISTIQUES DES MODELES MATHEMATIQUES A PARAMETRES CONCENTRES

2.2.1 - Modèles élastiques à un degré de liberté

Historiquement, le premier modèle utilisé a été un solide parfaitement élastique, c'est-à-dire un système masse-ressort posé sur une base rigide - Fig. 2.3.

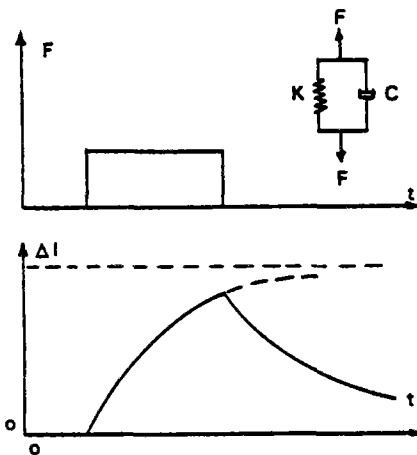


Fig. 2.2 - Comportement du solide de Kelvin-Voigt lors d'un chargement-déchargement.

Le vibreur est représenté par la masse M_0 et le sol est remplacé par un ressort non-pesant dont la rigidité, K , sera déterminée en fonction du module d'élasticité du sol, mesuré par des essais de plaques, que l'on multiplie par des coefficients dépendant du type du sol et de la forme de la surface de contact.

Les résultats obtenus par ce modèle ont été rarement satisfaisants ; en plus, ils donnent des déplacements infiniment grands à la fréquence de résonance, ce qui n'est évidemment pas conforme à la réalité.

Une seconde approche consiste à attribuer une certaine quantité de masse au sol dans le modèle précédent. Autrement dit, on suppose qu'une partie du sol vibre avec la même phase que la masse du vibreur - Fig. 2.4. La masse vibrante sera donc la somme de la masse du vibreur, M_v , et celle "en phase" du sol, M_s , dite "la masse ajoutée".

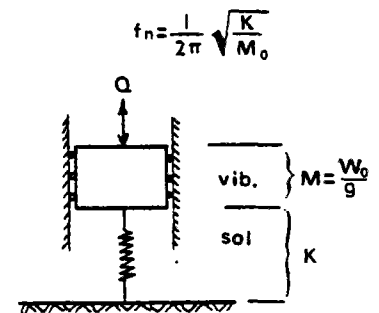


Fig. 2.3 - Modèle élastique à un degré de liberté.

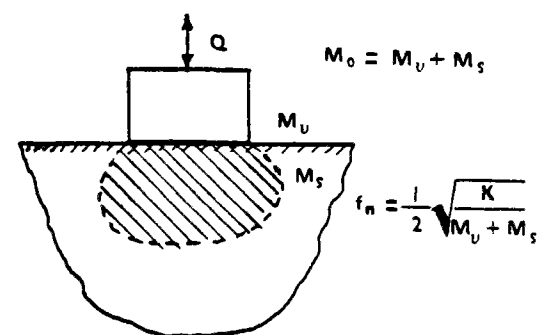


Fig. 2.4 - Masse "en phase" (masse ajoutée) du sol.

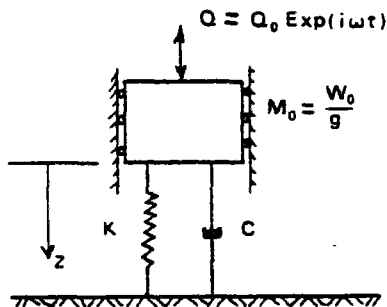
Plusieurs procédés de mesure normalisés ont été mis en oeuvre pour la détermination in-situ de la M_s . Cependant, les essais réalisés n'ont pas pu donner de bons résultats, car, comme il a été démontré par H. Lornez et autres [56], la valeur de la masse supposée en phase avec le vibreur varie en fonction de divers paramètres tels que la géométrie de la surface de contact.

Une des causes principales de l'inefficacité des modèles mécaniques ci-dessus provient du fait qu'ils ne représentent pas du tout cette caractéristique des massifs semi-infinis qu'est l'amortissement des sollicitations dû à la propagation des ondes de contraintes dans le massif. En effet, les modèles élastiques finis forment en quelque sorte des systèmes fermés ne permettant aucune atténuation de déplacements par la dissipation de l'énergie introduite.

2.2.2 - Modèle viscoélastiques à un degré de liberté

Pour mieux assimiler les propriétés mécaniques du massif semi-infini, une troisième approximation a donc été faite en schématisant le comportement dynamique du sol par celui d'un solide de Voigt à un degré de liberté. Ainsi, l'ensemble du sol-vibreux sera-t-il représenté, théoriquement, par une masse de grandeur M_0 , un ressort de rigidité K et un amortisseur de coefficient d'amortissement C , Fig. (2.5).

Fig. 2.5 - Modèle viscoélastique à un degré de liberté.



2.2.3 - Comportement sous charges harmoniques des modèles viscoélastiques

La force harmonique appliquée au modèle est la composante verticale de la force centrifuge créée par la rotation de la masse excentrique du vibreur. L'amplitude maximale de cette force sera donc $Q_0 = m_e e \omega^2$, m_e , e et ω étant respectivement la masse excentrique, l'excentricité et la pulsation du mouvement vibratoire.

Considérons la Fig. 2.5. D'après le deuxième principe de Newton, l'équation de l'équilibre dynamique du solide représenté s'écrit $M_0 \ddot{z} + C \dot{z} + Kz = M_0 \cdot g + m_e e \omega^2 \exp(i\omega t)$. (2.1)

si l'état initial correspond à l'état libre du ressort. Une translation de l'origine à $z = \frac{M_0 \cdot g}{K}$ simplifie l'équation ci-dessus :

$$M_0 \ddot{z} + C \dot{z} + Kz = m_e e \omega^2 \exp(i\omega t). \quad (2.2)$$

Cette translation correspond à la substitution, à l'état initial précédant, de l'état sous la charge statique $M_0 g$.

Une autre forme classique de l'Eq.2.2 s'obtient, en divisant ses deux membres par M_0 , et en remplaçant $\frac{C}{M_0}$ par $2 \xi \omega_n$ ($\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M_0}}$ est la pulsation propre du système non-amorti) :

$$\ddot{z} + 2 \xi \omega_n \dot{z} + \omega_n^2 z = \frac{m_e e \omega^2}{M_0} \exp(i\omega t). \quad (2.3)$$

La solution de l'équation homogène s'écrit :

$$z(t) = (c_1 \cos \omega_D t + c_2 \sin \omega_D t) \text{Exp} (-\xi \omega_n t) \quad (2.4)$$

dans laquelle ω_D est la pulsation du mouvement transitoire :

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.5)$$

On remarque que :

- si $\xi = (C/2\omega_n M_0) < 1$, le mouvement transitoire du modèle sera un mouvement harmonique amorti dont la pulsation est inférieure à celle du système non-amorti.

- si $\xi = 1$ la solution devient

$$z(t) = (C_1 + C_2 t) \text{Exp} (-\omega_n t) \quad (2.6)$$

le mouvement n'est plus oscillatoire ; il décroît et tend vers zéro. L'amortissement correspondant est appelé "amortissement critique", C_c :

$$C_c = 2 \omega_n M_0 \quad (2.7)$$

Le coefficient ξ sera, par définition, le rapport du coefficient d'amortissement réel à l'amortissement critique :

$$\xi = \frac{C}{C_c} \quad (2.8)$$

On l'appelle "taux d'amortissement".

Supposons, par exemple que $\xi = 0.05$: d'après l'Eq. 2.4, l'amplitude maximale de la vibration sera divisée par deux au bout de deux périodes d'oscillation. Il est donc admissible de négliger la réponse transitoire dans le cas de systèmes de sol-vibrateur pour lesquels le taux d'amortissement est en général supérieur à 0,20.

La réponse stationnaire du modèle a la même pulsation que la force extérieure :

$$z = A \text{Exp} i (\omega t - \phi) \quad (2.9)$$

l'amplitude, A , et le déphasage, ϕ , sont donnés par les formules suivantes :

$$A = \frac{m_e \omega^2}{\sqrt{(K - M_0 \omega^2)^2 + C^2 \omega^2}} \quad (2.10)$$

$$\phi = \text{Arc tg} \frac{C \omega}{K - M_0 \omega^2} \quad (2.11)$$

La substitution des expressions de ξ et ω_n donne :

$$D = \frac{A}{\frac{m_e e}{K} \omega^2} = \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[2 \xi \frac{\omega}{\omega_n} \right]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

$$\phi = \text{Arc tg} \frac{2 \xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad (2.13)$$

où, D est le "facteur d'amplification dynamique" qui représente le rapport entre le déplacement dynamique le plus grand, A , et le déplacement statique correspondant à $Q_0 : Q_0/K$. On peut également établir la relation suivante :

$$\frac{A}{\frac{m_e e}{M_0}} = \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \cdot D \quad (2.14)$$

dans laquelle $m_e e/M_0$ est appelé "amplitude nominale" du modèle, A_0 . Elle représente l'amplitude de la masse M_0 , supposée n'avoir aucune liaison avec d'autres corps et soumise uniquement à la force centrifuge $m_e \omega^2 \text{Exp}(i\omega t)$. Elle est une caractéristique de la masse vibrante qui sert à définir l'amplitude normalisée ou sans dimension du modèle, c'est-à-dire le rapport $\frac{A}{A_0}$.

La figure (2.6.a) illustre les variations de l'amplitude normalisée en fonction de la fréquence normalisée (ω/ω_n) pour différents taux d'amortissement. On note que les fréquences de "résonance" sont légèrement supérieures à celles du modèle non amorti :

$$f_m = \frac{f_n}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} \quad (f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M_0}}) \quad (2.15)$$

On observe, par ailleurs, que l'amplitude de déplacement s'approche asymptotiquement de l'amplitude nominale lorsque la fréquence de sollicitation dépasse celle de résonance et cela d'autant plus rapidement que ξ est plus élevé.

Les variations du déphasage en fonction de fréquence sont montrées sur la Fig. 2.6.b. A la fréquence de résonance, le déphasage entre l'amplitude instantanée de la force centrifuge et celle du déplacement de la masse vibrante, M_0 , atteint la valeur de $\frac{\pi}{2}$ quel que soit le taux d'amortissement, ξ .

Notons enfin que dans les cas où $\xi > 0,50$, la courbe amplitude-fréquence n'a pas de maximum et l'amplitude de déplacement est toujours inférieure à la valeur de l'amplitude nominale.

2.3 - ETUDES SUR L'EFFICACITE DES COMPACTEURS VIBRANTS A L'AIDE DES MODELES A PARAMETRES CONCENTRES

2.3.1 - L'objectif des études actuelles

En pratique, les courbes des réponses en fréquence, tracées à partir de mesures in-situ, de rouleaux vibrants et celles des fondations des machines vibrantes sont similaires aux courbes de la Fig. 2.6.a. Elles présentent en effet un maximum dans le domaine des fréquences habituelles et s'approchent d'une valeur constante pour des fréquences supérieures à la fréquence de résonance.

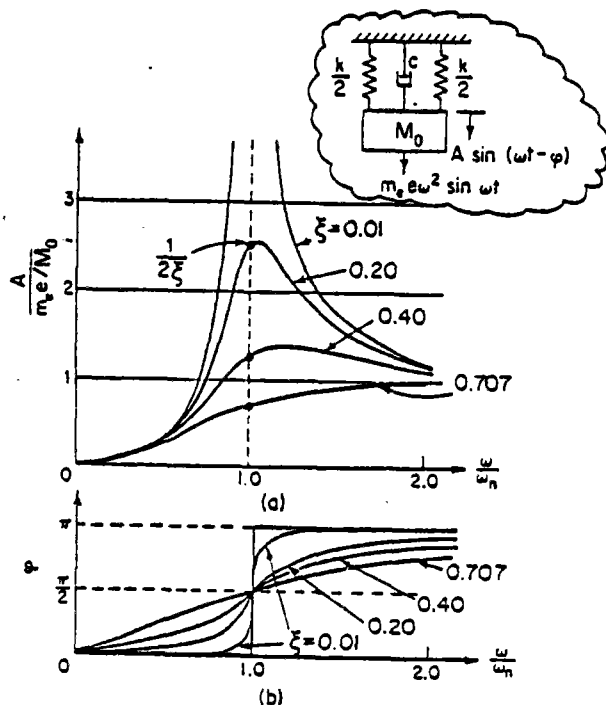


Fig. 2.6 - Courbes de réponse du modèle viscoélastique à un degré de liberté soumis à la force centrifuge.

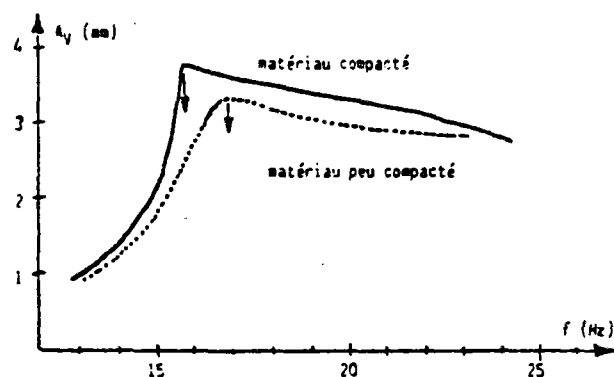


Fig. 2.7 - Courbes de réponse en amplitude en fonction de l'état de densité du matériau ; (Vibrex) ; (d'après Khay [47]).

Dans le cas de compactage vibré, cette valeur limite de l'amplitude est égale à l'amplitude nominale du rouleau vibrant - Fig. 2.7.

Les accords constatés entre le comportement réel du couple sol-vibreux et celui du solide visco-élastique linéaire à un degré de liberté a donné lieu à de nombreuses recherches appliquées dans les domaines concernés.

En ce qui concerne le compactage par des compacteurs vibrants, ces études visent à :

- déterminer le rôle de différents paramètres du matériel afin de mieux les choisir et même pour une meilleure conception technique du compacteur vibrant.
- évaluer la fréquence de résonance relative aux cas réels pour optimiser le coût et le temps de compactage.
- concevoir des méthodes de contrôle, en continu, de la compacité atteinte dans la couche à compacter.

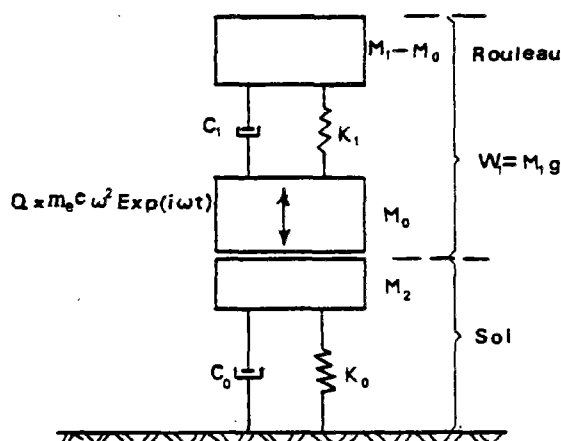
En effet, au cours d'un compactage à fréquence constante, les variations des paramètres du matériel tels que l'amplitude de déplacement du cylindre vibrant dépendent des variations de paramètres relatifs au sol - le module d'élasticité, l'amortissement, etc.- qui, eux-mêmes varient en fonction de la densité de la couche compactée. Il serait donc possible de contrôler l'évolution de cette dernière en enregistrant celle des paramètres du rouleau.

A titre d'exemple, citons l'étude de F. DE GRAEVE (1980) [26] sur l'optimisation des performances des compacteurs vibrants par ajustement automatique de la fréquence. Il s'agit de compacter à la fréquence de résonance pour laquelle, selon la réponse du modèle mécanique ci-dessus, le déphasage entre la bille vibrante et la masse excentrique sera égal à $\frac{\pi}{2}$. En pratique la méthode proposée est la suivante : en contrôlant, à chaque passe, la valeur du déphasage, qui est affichée au moyen d'un appareil électronique, le conducteur du rouleau ajuste la fréquence de vibration au niveau de la résonance.

2.3.2 - Modèle viscoélastique à plusieurs degrés de liberté

Quant au premier point, l'étude la plus détaillée a été entreprise par J.-M. MACHET, laquelle a fait l'objet d'un Rapport de Recherche, [60], au L.C.P.C. Elle assimile l'ensemble sol-compacteur vibrant à un modèle viscoélastique à deux degrés de liberté qui tient compte d'une part de la liaison viscoélastique qui existe entre le rouleau vibrant et son châssis, et d'autre part de la possibilité de décollement du compacteur vibrant du sol sous-jacent - Fig. 2.8.

Fig. 2.8 - Modèle viscoélastique assimilant l'ensemble sol-rouleau vibrant.



L'étude du phénomène de décollement, appelé également "désaccouplage", qui ne peut pas être menée à l'aide d'un modèle à un degré de liberté, aboutit à la détermination théorique d'une valeur limite pour la force dynamique appliquée au sol - "force vibrogène" - au-dessus de laquelle il y aura décollement à chaque cycle de vibration.

L'influence du désaccouplage sur l'efficacité des rouleaux vibrants a été analysée de façon plus détaillée par J.M. MACHET et R. SANEJOUAND dans [61].

Ainsi, la schématisation du couple sol-compacteur vibrant à l'aide du modèle à trois degrés de liberté a-t-elle permis d'analyser l'influence sur l'efficacité du rouleau de différents paramètres de ce dernier tels que A_0 , $\frac{M_1-M_0}{M_0}$, K_1 , C_1 .

Les données des mesures en vraie grandeur qui ont été réalisées au C.E.R. dans le cadre du programme de Vibrex (voir Ch. 1 § 4) fournissent une base expérimentale à ces études. Par exemple, les enregistrements des variations de la force totale appliquée à la bille (F.T.A.) mettent en évidence le phénomène de désaccouplage, prévu par le modèle ci-dessus, et indiquent la fréquence au-dessus de laquelle il y a décollement dans un cas donné de compactage.

2.4 - MODELISATION DU MASSIF SEMI-INFINI DU SOL

2.4.1 - Position du problème

L'interprétation des résultats des essais du compactage réalisés en fosses, à l'aide des modèles mathématiques reste cependant difficile et se limite à la définition du rôle des caractéristiques du matériel telles que le rapport des masses, $\frac{M_1 - M_0}{M_0}$, la rigidité de la liaison entre le rouleau et son châssis, K_1 , etc.

En effet, si la schématisation du compacteur par un modèle mécanique n'est pas une approximation grossière, l'assimilation du massif semi-infini du sol à un solide viscoélastique à un degré de liberté constitue, par contre, une source d'incertitude et nécessite un raisonnement théorique particulier.

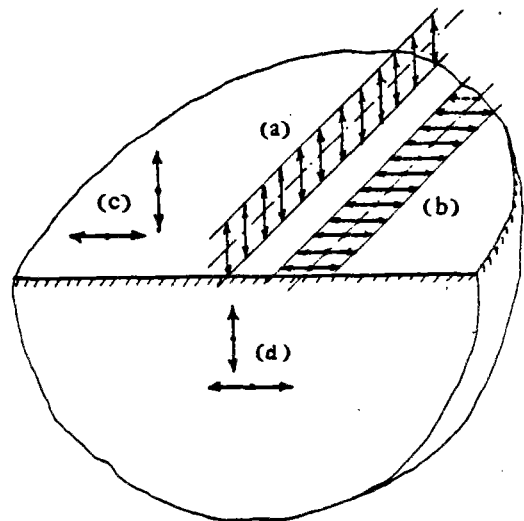
Quelle est en effet la base théorique de l'assimilation du comportement sous charges harmoniques du massif semi-infini de sol à celui d'un solide viscoélastique linéaire ?

Cette question peut être formulée sous une forme quelque peu différente : Quels coefficients faut-il attribuer à un solide de Kelvin-Voigt afin qu'il reproduise le comportement sous charge harmonique d'un massif semi-infini ayant des propriétés mécaniques données ?

2.4.2 - Analyse du comportement dynamique du massif semi-infini élastique

A la base de toutes les études théoriques relatives au comportement sous charges dynamiques du massif semi-infini élastique, se trouve le travail de LAMB (1904) concernant la réponse d'un massif semi-infini élastique, homogène et isotrope (semi-espace élastique) soumis à sa surface libre à une charge sinusoïdale verticale répartie uniformément sur une ligne - Fig. 2.9. Le problème est donc bidimensionnel : [51].

Fig. 2.9 - Semi-espace élastique soumis aux charges harmoniques.



Il a complété son analyse en remplaçant la force verticale par une force sinusoïdale horizontale-- Fig. 2.9.(b).

Enfin, il a résolu le problème tridimensionnel, c'est-à-dire le cas où une force harmonique concentrée verticale ou horizontale s'exerce en un point quelconque du semi-espace - Fig. 2.9(c) et (d). Ce dernier problème est généralement dit "de Boussinesq en dynamique", car le travail de Lamb est en effet l'extension de la théorie de Boussinesq (1885) [10] dans le domaine des forces dynamiques.

Visant la détermination des propriétés élastiques des sols par auscultation dynamique, Reissner (1936) [76]. a tenté d'établir une théorie pour évaluer la réponse dynamique d'une fondation circulaire en fonction des propriétés mécaniques du sol sous-jacent. Le modèle mathématique représentant le sol est celui du semi-espace élastique et la charge appliquée verticale se répartit uniformément sur l'aire circulaire de la fondation :

$$P_0 \text{Exp}(i\omega t) = \pi r_0^2 \sigma_z \text{Exp}(i\omega t).$$

En intégrant la solution de Lamb sur la zone circulaire de chargement, Reissner obtient une solution analytique pour le déplacement au centre de la fondation, z_0 :

$$z_0 = \frac{P_0 \text{Exp}(i\omega t)}{Gr_0} (f_1 + if_2) , \quad (2.16)$$

dans laquelle :

- P_0 est l'amplitude de la force dynamique appliquée ;
- $\omega = 2\pi f$, la pulsation ;
- G = le module de cisaillement du semi-espace ;
- r_0 = le rayon de la fondation ;
- f_1 et f_2 sont les "fonctions de déplacement" de Reissner.

Dans l'équation ci-dessus, la force et le déplacement sont positifs dans le sens descendant ; f_1 et f_2 sont des fonctions qui dépendent des paramètres sans-dimension suivants :

- le coefficient de poisson du massif, ν ;
- la fréquence "normalisée", $a_0 = \frac{\omega r_0}{v_s} = \omega r_0 \sqrt{\rho/G}$.

(2.17)

Ici, v_s est la vitesse de propagation (célérité) de l'onde de cisaillement dans le milieu élastique dont la masse volumique est représentée par ρ .

Le déphasage entre la force appliquée, $P_0 \text{Exp}(i\omega t)$, et le déplacement z_0 sera donc

$$\psi = \text{Arc tg} \left(\frac{-f_2}{f_1} \right) . \quad (2.18)$$

2.4.3 - Solution approximative de Reissner pour le comportement du couple vibreur-semi-espace élastique

Ayant obtenu la solution analytique pour le déplacement au centre de la fondation (Eq. 2.16), Reissner établit l'équation de l'équilibre dynamique du vibreur de la Fig. 2.10 en adoptant les deux hypothèses simplificatrices ci-dessous :

- 1 - La répartition de la charge sous la fondation rigide du vibreur est uniforme.
- 2 - Le déplacement ainsi que l'accélération de la masse M_0 du vibreur sont égaux, respectivement, aux déplacement et accélération du centre de la fondation circulaire.

L'équation de Reissner s'écrit :

$$P_0 \cos \omega t - Q_0 \cos (\omega t + \alpha) = M_0 \frac{d^2}{dt^2} R_e(z_0) \quad (2.19)$$

$$\text{ou} \quad P_0 \cos \omega t + \frac{M_0 \omega^2}{Gr_0} (f_1 \cos \omega t - f_2 \sin \omega t) = Q_0 \cos (\omega t + \alpha) \quad (2.20)$$

dans laquelle : α est le déphasage entre la force extérieure, Q , et celle d'interaction, $P_0 \exp(i\omega t)$.

Q_0 peut être une grandeur constante ou bien dépendre de la fréquence de vibration ; il en est ainsi lorsque la force extérieure est engendrée par rotation des masses excentriques - Fig. 2.10. Dans ce dernier cas nous avons $Q_0 = m_e e \omega^2$

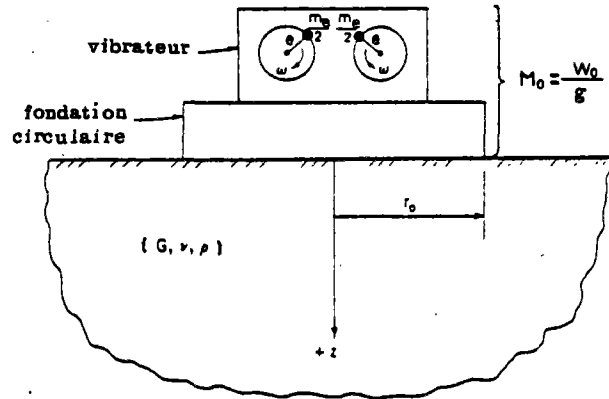


Fig. 2.10 - Fondation circulaire rigide soumise à la force centrifuge.

La solution de l'Eq. 2.20 donne les grandeurs suivantes :

L'amplitude de la force dynamique totale qui s'applique à l'aire circulaire,

$$P_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{(1 - ba_0^2 f_1)^2 + (ba_0^2 f_2)^2}} \quad (2.21)$$

L'amplitude du déplacement du vibreur,

$$A = \frac{Q_0}{Gr_0} \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{(1 - ba_0^2 f_1)^2 + (ba_0^2 f_2)^2}} \quad (2.22)$$

Le déphasage de déplacement par rapport à la force appliquée (Q), $\phi = \alpha + \psi$:

$$\phi = \text{Arc tg} \frac{f_2}{-f_1 + ba_0^2(f_1^2 + f_2^2)} \quad (2.23)$$

Le déphasage entre Q et $P_0 \exp(i\omega t)$

$$\alpha = \text{Arc tg} \frac{ba_0^2 f_2}{1 - ba_0^2 f_1} \quad (2.24)$$

La puissance nécessaire pour entretenir la vibration :

$$PD = \frac{Q_0^2}{r_0^2 \sqrt{\rho G}} \frac{-a_0 f_2}{(1 - ba_0^2 f_1)^2 + (ba_0^2 f_2)^2} \quad (2.25)$$

dans lesquelles, $b = \frac{M_0}{\rho r_0^3}$ est un autre paramètre sans dimension que l'on appelle le "facteur de masses".

Les détails de l'analyse de Reissner peuvent être trouvés dans l'ouvrage original et dans les articles écrits séparément de P.M. Quinlan et T.Y. Sung en 1953, [73] et [84]. Les équations 2.22, 2.23 et 2.25 représentent un intérêt pratique particulier.

D'après ces trois équations, il est théoriquement possible de mesurer les caractéristiques du semi-espace élastique (G, ν, ρ), en mesurant, lors d'une auscultation dynamique, l'amplitude de déplacement, A , le déphasage, ϕ et la puissance dissipée, PD .

La base physique de l'analyse de Reissner, c'est le phénomène de propagation divergente des ondes élastiques, à partir de la source de sollicitations vers l'infini dans le semi-espace considéré.

Les équations aux dérivées partielles de l'équilibre dynamique en tout point du semi-espace sont résolues par intégration dans le plan de variables complexes.

Malgré certaines erreurs de calcul ([84] p. 37), le travail de Reissner constitue la base de presque toutes les études analytiques relatives au comportement dynamique du couple vibreur-massif semi-infini qui l'ont suivi.

2.4.4 - Travaux de Quinlan et Sung (1953)

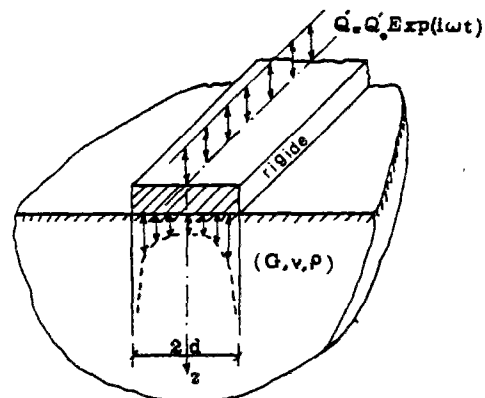
Les travaux de Quinlan et Sung sont, comme nous l'avons dit, l'extension de l'étude de Reissner en ce qui concerne la géométrie de la fondation ainsi que la distribution de la charge sur la surface sollicitée.

Quinlan a étudié la réponse du semi-espace élastique soumis à la vibration par une fondation infiniment longue ou circulaire. Les distributions de charge pour chacune de ces fondations sont les suivantes :

- uniforme,
- parabolique,
- celle de fondation rigide en chargement statique (Eq. 2.36).

Seule la dernière distribution a fait l'objet d'un calcul numérique dans l'article de Quinlan dont nous donnons ici les résultats relatifs à la fondation rectangulaire de longueur infinie - Fig. 2.12.

Fig. 2.11 - Fondation rigide de longueur infinie soumise à la charge harmonique sur toute sa longueur.



Les paramètres sans-dimension choisis sont :

- la fréquence sans dimension, $a_0' = \omega d \sqrt{\rho/G}$; (2.26)

- le rapport de masses, $b' = \frac{M_0}{\rho d^2}$; (2.27)

M' , est la masse par unité de longueur de la fondation.

L'amplitude de la force extérieure par unité de longueur de la fondation est Q'_0 . Lorsqu'il s'agit d'une force centrifuge $Q'_0 = m'_e \omega^2$ où m'_e est la masse excentrique par unité de longueur.

L'équation de l'équilibre de la fondation donne les formules ci-dessous :

$$P_0 = \frac{Q'_0}{\sqrt{(1 + b' a_0'^2 f_3)^2 + (b' a_0'^2 f_4)^2}} \quad (2.28)$$

$$A = \frac{Q'_0}{G} \sqrt{\frac{f_3^2 + f_4^2}{(1 + b' a_0'^2 f_3)^2 + (b' a_0'^2 f_4)^2}} \quad (2.29)$$

$$\phi = \text{Arc tg} \frac{-f_4}{f_3 + b' a_0'^2 (f_3^2 + f_4^2)} \quad (2.30)$$

$$PD = \frac{2Q_0'^2}{\sqrt{\rho G}} \frac{a'_0 f_4}{(1 + b' a_0'^2 f_3)^2 + (b' a_0'^2 f_4)^2} \quad (2.31)$$

Ces équations sont parfaitement similaires aux équations de Reissner (Eqs 2.21, 2.22, 2.23, 2.25) et f_3 et f_4 représentent les fonctions de déplacement relatives à l'axe de symétrie ($x = 0$) de la fondation. La Figure (2.12) illustre les variations de f_3 et f_4 en fonction de la fréquence normalisée, a'_0 .

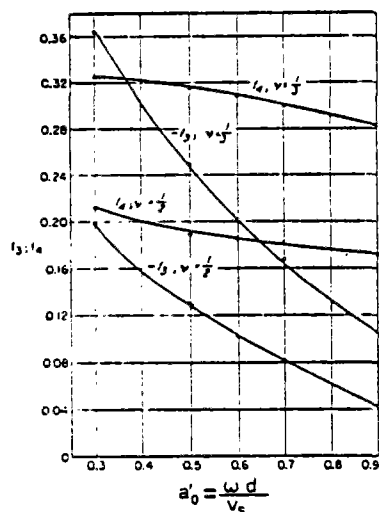


Fig. 2.12 - Fonctions de déplacement f_3 et f_4 pour la fondation rigide de filante (d'après Quinlan [73]).

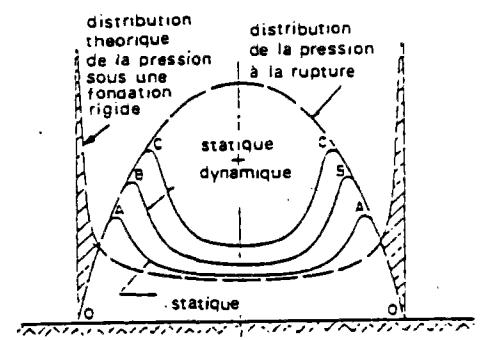


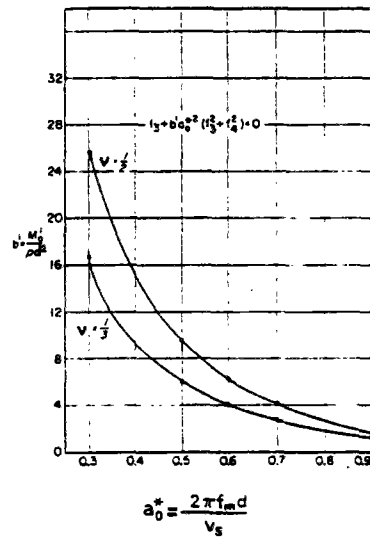
Fig. 2.13 - Variation réelle de la répartition des pressions à l'interface du système sol-fondation circulaire (d'après Richart et Whitman [74]).

Selon la distribution considérée, le déplacement du semi-espace sur l'axe de symétrie s'écrit :

$$z_0 = \frac{P'_0 \text{Exp}(i\omega t)}{G} (f_3 + if_4) \quad (2.32)$$

dans laquelle $P'_0 \text{Exp}(i\omega t)$ est la force totale appliquée sur l'unité de longueur de la bande infinie. En effet le problème étudié par Quinlan est du type de Newman et les conditions aux limites du massif semi-infini portent sur les contraintes ; cela nécessite une hypothèse concernant la distribution sur l'aire de contact entre la fondation et le semi-espace. Or la répartition du type "de fondation rigide" en statique ne correspond pas à la distribution en dynamique comme il a été démontré par Richart et Whitman [74] à l'aide des mesures dont les résultats sont illustrés par la Fig. 2.13. Ce phénomène a été observé aussi dans le cadre des expérimentations par le vibreur lourd du L.C.P.C. (voir J. Vakili (1969) [89]) : on constate que la forme de la répartition de la charge sous la base rigide du vibreur varie avec la fréquence, l'amplitude de la force appliquée étant constante.

Fig. 2.14 - Relation entre b' et a_0^* correspondant aux fréquences de résonance de la fondation rigide de longueur infinie ; (d'après Quinlan [73]).



Par conséquent, l'hypothèse relative à la distribution du type "fondation rigide", donnée par la théorie élasto-statique, doit être considérée comme une approche du phénomène réel.

Les équations 2.22 et 2.29 démontrent que quelle que soit la fréquence de vibration, l'amplitude de déplacement, A , aura une valeur déterminée ; d'où la discordance entre le comportement du couple vibreur-massif semi-infini et celui d'un système à paramètres concentrés et parfaitement élastique dont le déplacement tend vers l'infini lorsque la fréquence s'approche de la fréquence propre du système.

Par ailleurs, les expérimentations en vraie grandeur ont montré que lorsque la fréquence de la vibration atteint la fréquence de "résonance" du système sol-vibreux, le déphasage du déplacement par rapport à la force sinusoïdale appliquée (Q) atteint la valeur de $\frac{\pi}{2}$; ce qui est compatible avec le comportement du modèle viscoélastique illustré par Fig. 2.6. On a donc

$$\operatorname{tg} \phi \approx \infty$$

pour $f = f_m$;

ou, d'après l'Eq. 2.30

$$f_3 + b' a_0^2 (f_3^2 + f_4^2) = 0 \quad (2.33)$$

dans laquelle, $a_0^* = \frac{2\pi f_m d}{v_s}$ correspond à la fréquence de résonance. La représentation graphique de l'Eq. 2.33 pour deux valeurs du coefficient de Poisson ($\nu = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$) est donnée dans la Fig 2.14. Elle permet de déterminer facilement la fréquence de résonance du système suivant son rapport de masses (b'). Inversement, il est possible de déterminer b' si l'on connaît a_0^* à partir des essais in-situ.

L'étude de Sung concerne uniquement la fondation circulaire en appliquant les trois cas de distribution de contraintes utilisées également par Quinlan :

a) distribution uniforme,

$$\sigma_z = \frac{P_0 \text{Exp}(i\omega t)}{\pi r_0^2}, \quad r \leq r_0, \quad (2.34)$$

$$\sigma_z = 0, \quad r > r_0;$$

b) distribution parabolique

$$\sigma_z = \frac{2 P_0 (r_0^2 - r^2) \text{Exp}(i\omega t)}{\pi r_0^4}, \quad r \leq r_0, \quad (2.35)$$

$$\sigma_z = 0, \quad r > r_0;$$

c) distribution de "fondation rigide" en élasto-statique

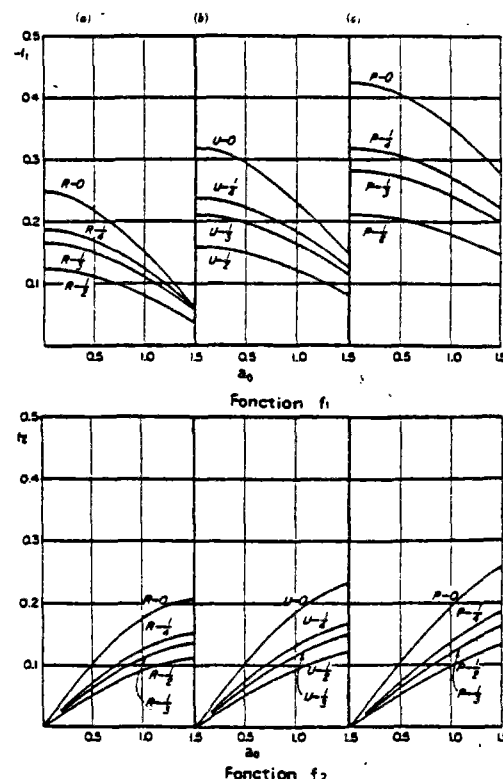
$$\sigma_z = \frac{P_0 \text{Exp}(i\omega t)}{2 \pi r_0 \sqrt{r_0^2 - r^2}}, \quad r \leq r_0, \quad (2.36)$$

$$\sigma_z = 0, \quad r > r_0.$$

L'intérêt particulier de cette étude résulte du fait qu'elle donne des solutions numériques complètes pour toutes les distributions précédentes en les présentant sous forme de graphiques, ce qui met en évidence le rôle important de la répartition de contraintes dans le comportement en vibration de l'ensemble sol-fondation.

Les variations des fonctions de déplacement f_1 et f_2 en fonction de a_0 pour trois types de distribution sont données par les graphiques de la Fig. 2.15, dans lesquels chaque courbe correspond à une valeur constante du coefficient de Poisson ; ainsi la référence $P - \frac{1}{3}$, par exemple, indique-t-elle la courbe relative à $\nu = \frac{1}{3}$ dans le cas d'une distribution parabolique de contraintes sur l'aire circulaire. On remarque la nette variation des valeurs de f_1 et f_2 d'une distribution à l'autre toutes choses étant égales par ailleurs.

Fig. 2.15 - Fonctions de déplacement correspondant aux différents types de répartition des pressions sous une fondation circulaire et pour $\nu = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ (d'après Sung [84]).



Quant à l'influence de la distribution des contraintes sur le comportement du couple vibreur-massif semi-infini, nous nous limitons à la représentation graphique de la Fig. 2.16.a, rapportée dans [75] à partir des résultats numériques de l'article de Sung [84] concernant le cas où, $\nu = \frac{1}{4}$, et $b = \frac{M_0}{\rho r_0^3} = 5$. La comparaison des courbes présentées démontre que plus les contraintes sont concentrées au voisinage du centre de la fondation, plus grande est l'amplitude de déplacement, et moins grande est la fréquence de résonance. Par ailleurs, l'écart entre les amplitudes de déplacement s'élargit à proximité des fréquences de résonance.

Pour mieux connaître l'importance relative de la variation de contraintes, nous présentons également la Fig. 2.16.b qui indique l'influence de la variation du coefficient de Poisson dans le cas de la distribution de "fondation rigide", Q , M_0 , r_0 étant les mêmes pour les deux figures.

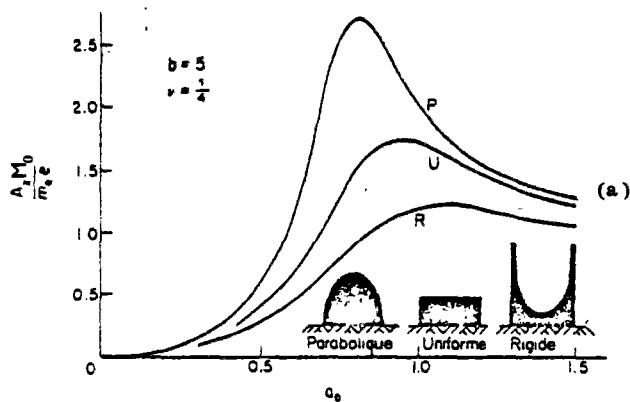
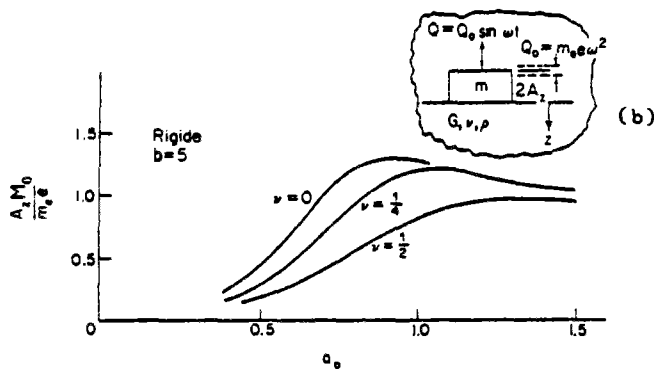


Fig. 2.16 - Courbes de réponse en fréquence pour amplitude de la fondation circulaire (a) pour trois formes de répartition des pressions à l'interface, (b) pour la répartition du type de "fondation rigide", (d'après Richart et Whitman [74]).



Dans son étude, Sung suppose que la distribution de contraintes reste constante pour le domaine des fréquences considéré. En fait la distribution de contraintes du type "fondation rigide", qui implique un déplacement constant sur toute la surface en chargement statique, ne peut pas produire un déplacement uniforme dans le cas dynamique. Bycroft (1956) a évalué la valeur moyenne du déplacement sous une fondation et a donné ainsi des valeurs plus convenables des fonctions de déplacement, f_1 et f_2 . Ses valeurs des fonctions de déplacement pour la fondation rigide circulaire sont données par la Fig. 2.17 pour $\nu = 0, \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$.

On peut observer plusieurs points importants sur la Fig. 2.17 : lorsque $a_0 = 0$ (cas statique), $f_2 = 0$ et la valeur de f_1 , introduite dans l'Eq. 2.16 doit donner le déplacement statique correct de la fondation.

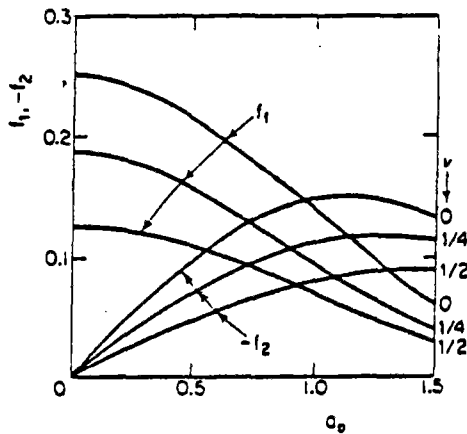


Fig. 2.17 - Fonctions de déplacement des fondations circulaires rigides : (d'après Bycroft [13]).

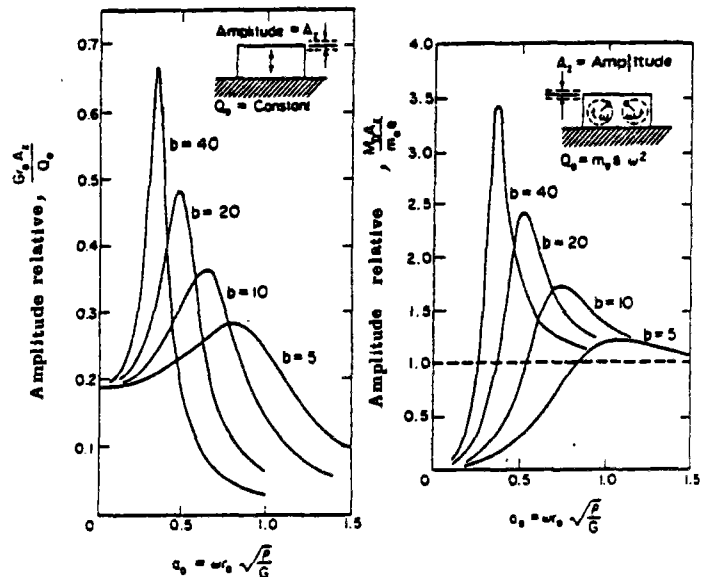


Fig. 2.18 - Courbes de réponse en fréquence (normalisée) pour amplitude des fondations circulaires rigides surmontant le semi-espace élastique ($\nu = \frac{1}{4}$) ; (d'après Richart [75]).

Pour une fondation circulaire rigide, le déplacement statique est égal à :

$$z_s = \frac{P_0 (1 - \nu)}{4Gr_0}$$

Notons que f_1 et f_2 sont évaluées pour des valeurs de a_0 comprises entre 0 et 1,5. C'est le domaine pratique dans lequel les pics de résonance peuvent se produire et pour lequel la plupart des études de la résonance à l'état stationnaire ont été effectuées.

2.4.5 - Le rôle du facteur de masses, $b = \frac{M_0}{\rho r_0^3}$

Les travaux précédemment cités ont mis en évidence le rôle particulier que joue le paramètre sans dimension b , dans la réponse en fréquence du système vibreur-massif semi-infini. En fait il est un paramètre arbitraire dans la mesure où ρr_0^3 est une masse fictive correspondant à une partie du massif semi-infini de volume égal à r_0^3 .

La Fig. 2.18 illustre les variations en fonction de b de la réponse d'une fondation rigide circulaire soumise à une charge harmonique ($Q_0 = \text{constante}$ et $Q_0 = m_e \omega^2$). Si l'on compare les courbes indiquées avec celles de la Fig. 2.6, on voit qu'il existe une forte similitude entre le comportement du système vibreur-massif semi-infini et celui du solide viscoélastique à un degré de liberté et que le rôle du rapport de masses, b , correspond à celui de l'inverse du taux d'amortissement, ξ , dans le solide de Kelvin-Voigt.

Comme le montrent les solutions analytiques, le système vibreur-massif semi-infini est un système amorti dans lequel les sollicitations introduites s'amortissent en raison de leurs radiations de la source vers l'infini dans le semi-espace élastique. C'est pourquoi ce phénomène d'amortissement dans un système parfaitement élastique est appelé "amortissement géométrique".

2.4.6 - Equation de Hsieh

Hsieh (1962) a repris les équations de Reissner pour établir une expression mathématique de l'amortissement géométrique du système sol-fondation circulaire rigide; [44].

Le déplacement vertical d'un disque circulaire de rayon r_0 , supposé non-pesant et parfaitement rigide, posé sur la surface du semi-espace élastique et soumis à la force harmonique $P = P_0 \text{Exp}(i\omega t)$ s'obtient à partir de l'Eq. 2.26,

$$z = \frac{P_0 \text{Exp}(i\omega t)}{Gr_0} (f_1 + if_2), \quad (2.37)$$

f_1 et f_2 étant données par les graphiques de Bycroft dans la Fig. 2.17. La vitesse de déplacement sera donc :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{P_0 \omega \text{Exp}(i\omega t)}{Gr_0} (if_1 - f_2). \quad (2.38)$$

Multipliant le z par $f_1 \omega$ et la $\frac{dz}{dt}$ par $-f_2$, on peut écrire :

$$f_1 \omega z - f_2 \frac{dz}{dt} = \frac{P_0 \omega \text{Exp}(i\omega t)}{Gr_0} (f_1^2 + f_2^2); \quad (2.39)$$

$$\text{d'où : } P = P_0 \text{Exp}(i\omega t) = -\frac{Gr_0}{\omega} \frac{f_2}{(f_1^2 + f_2^2)} \frac{dz}{dt} + Gr_0 \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} z; \quad (2.40)$$

$$\text{ou encore : } P = C_z \frac{dz}{dt} + K_z z, \quad (2.41)$$

$$\text{dans laquelle : } C_z = \frac{r_0^2}{a_0} \sqrt{\rho G} \left(\frac{-f_2}{f_1^2 + f_2^2} \right), \quad (2.42)$$

$$\text{et : } K_z = Gr_0 \left(\frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} \right). \quad (2.43)$$

Notons que C_z et K_z incluent tous deux les fonctions f_1 et f_2 : ils dépendent donc de a_0 et ν .

Si l'on remplace le disque par une fondation de même rayon, de poids W_0 et soumise à la force harmonique, Q , de pulsation ω , son mouvement sera décrit par l'équation ci-dessous :

$$\frac{W_0}{g} \frac{d^2z}{dt^2} = Q - P; \quad (2.44)$$

$$\text{ou : } M_0 \frac{d^2z}{dt^2} + C_z \frac{dz}{dt} + K_z z = Q. \quad (2.45)$$

L'Eq. 2.45 présente la même forme générale que l'équation d'équilibre d'un système à un degré de liberté de type masse-ressort-amortisseur, Eq.2.1.

La différence majeure est que le terme d'amortissement c_2 et le terme de raideur k_2 sont tous deux fonctions de la fréquence de vibration. Par ailleurs, l'Eq. 2.40 montre clairement que l'amortissement géométrique du système vibreur-semi-espace élastique est gouverné par la fonction de déplacement f_2 tandis que le terme correspondant à la rigidité élastique est gouverné par f_1 .

2.4.7 - Analogie de Lysmer

Pour approcher la réponse dynamique d'une fondation rigide circulaire, Lysmer a envisagé une fondation constituée d'une série d'anneaux concentriques. En appliquant des pressions uniformes de différentes grandeurs sur chaque anneau, il a pu développer un déplacement constant sous la fondation et évaluer sa réponse dynamique à une force harmonique verticale ; (Lysmer (1965) [57]).

Tout en développant sa solution, Lysmer utilisa diverses notations commodes pour simplifier la présentation :

la fonction de déplacement,

$$\tilde{f} = f_1 + if_2 \quad (2.46)$$

multipliée par $4/(1-\nu)$ devient pratiquement indépendante de ν :

$$\tilde{F} = \frac{4}{1-\nu} \tilde{f} = F_1 + iF_2 \quad (2.47)$$

la Fig. 2.19 montre comment les fonctions de déplacement de Bycroft se ramènent à une seule courbe quand elles sont modifiées par l'Eq. 2.47.

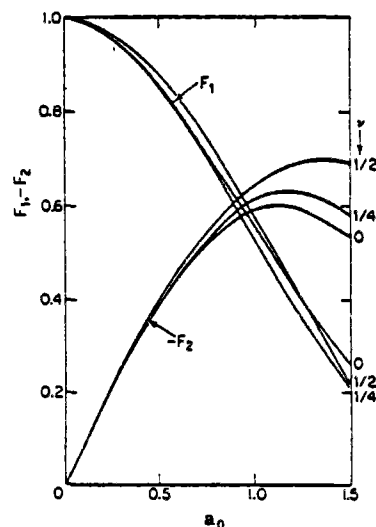


Fig. 2.19 - Variation de F_1 et F_2 avec le coefficient de Poisson ;
(d'après Lysmer et Richart - cité dans [75]).

En utilisant cette notation, Lysmer a calculé les valeurs de f_1 et f_2 pour des valeurs de a_0 comprises entre 0 et 8.0 et il les a étendues, à l'aide d'une approximation à $a_0 \rightarrow \infty$ - Fig. 2.20.

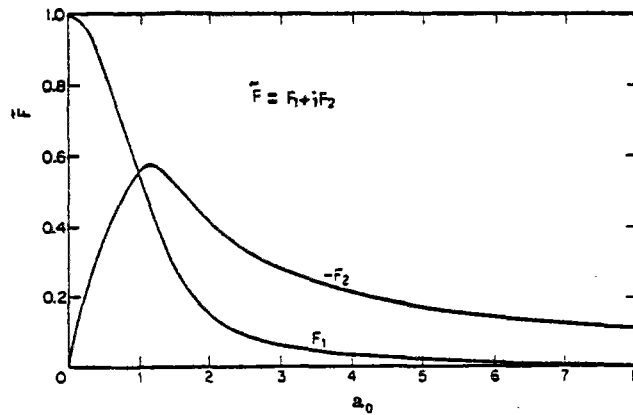


Fig. 2.20 - Variation de F_1 et F_2 en fonction de la fréquence normalisée ; (d'après Lysmer et Richart - cité dans [75]).

L'équation de déplacement de Reissner, Eq. 2.16, en fonction de \tilde{F} devient :

$$z = \frac{P_0 \exp(i\omega t)}{K_z} \tilde{F} \quad (2.48)$$

La constante k_z peut être développée à partir de l'Eq. 2.43 en remplaçant f_1 et f_2 par F_1 et F_2 . Il a remarqué ensuite qu'en introduisant un facteur de masses modifié,

$$B_z = \frac{1-\nu}{4} b = \frac{1-\nu}{4} \frac{M_0}{\rho r_0^3} \quad (2.49)$$

l'influence du coefficient de Poisson était complètement éliminée. Ainsi a-t-il développé les courbes de réponse en introduisant les expressions de \tilde{F} et B_z dans l'Eq. 2.22 qui devient :

$$A_z = \frac{(1-\nu) Q_0}{4Gr_0} D \quad (2.50)$$

dans laquelle D est le facteur d'amplification dynamique par lequel le déplacement statique, produit par la force Q_0 , est multiplié pour donner l'amplitude de déplacement A_z .

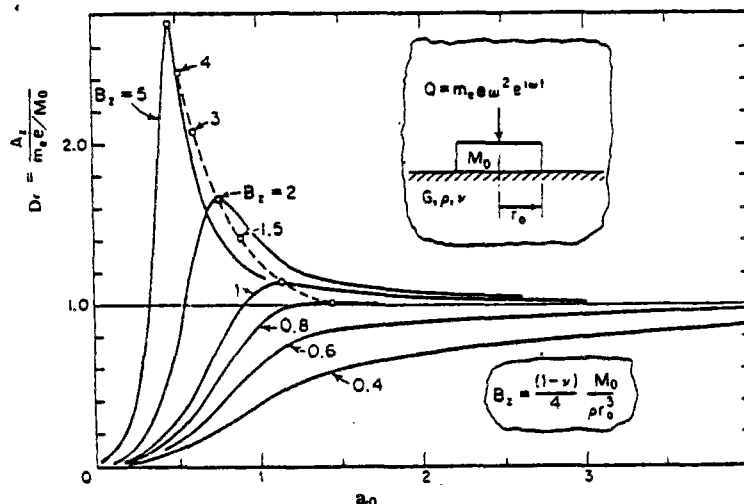


Fig. 2.21 - Amplitude relative en fonction de la fréquence normalisée pour différents facteurs de masses ; [75].

Au cas où $Q_0 = m_e \omega^2$, on peut écrire :

$$A_z = \frac{m_e e}{M_0} (Da_0^2 B_z) = \frac{m_e e}{M_0} D_r \quad (2.51)$$

où, le facteur d'amplification dynamique, D_r , est le rapport entre l'amplitude de déplacement, A_z , et l'amplitude nominale de la fondation vibrante, $A_0 = \frac{m_e e}{M_0}$; (Fig. 2.21).

Les Figs 2.22 fournissent un moyen simple d'évaluer l'amplitude maximale du mouvement vertical d'une fondation rigide circulaire ainsi que la fréquence de résonance pour les valeurs de B_z comprises entre 0 et 5.

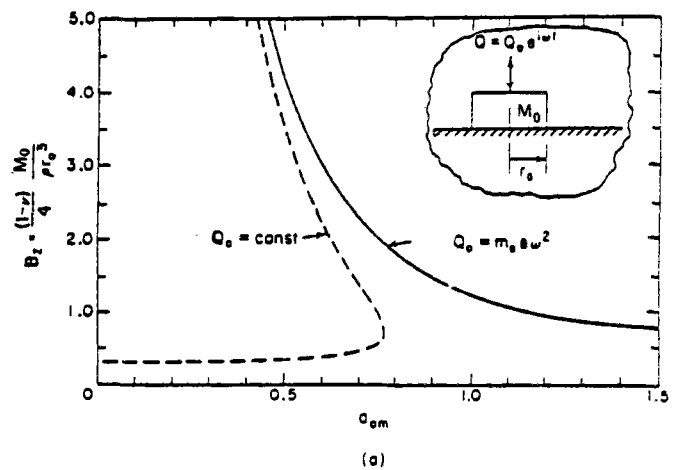
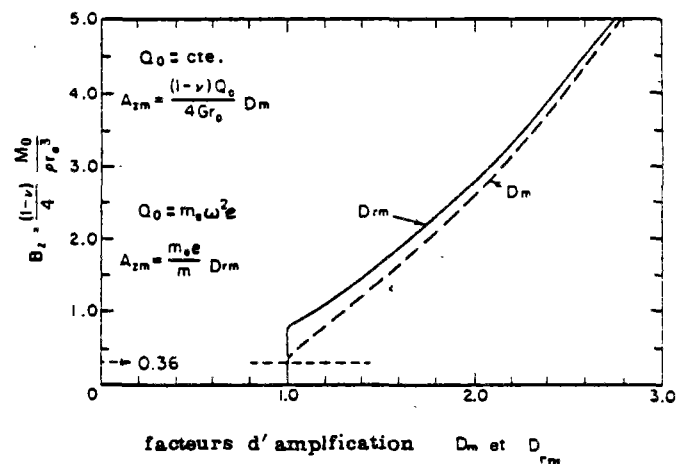


Fig. 2.22 - Réponse d'un vibreur circulaire lors de résonance : (a) relation entre le facteur de masses et la fréquence ; (b) relation entre le facteur de masses et l'amplitude relative, (d'après Richart et al. [75]).



Après avoir étudié les variations des coefficients d'amortissement et de rigidité avec la fréquence "normalisée" (a_0), comme cela a été obtenu à partir de la théorie de semi-espace élastique, Lysmer a découvert que l'on peut remplacer ces coefficients par des termes constants (indépendants de a_0). Il a choisi pour le terme de rigidité sa valeur statique :

$$K_z = \frac{4 Gr_0}{(1 - \nu)} \quad (2.52)$$

et il a trouvé que la meilleure expression pour le terme d'amortissement pour les a_0 situées entre 0 et 1,0 est :

$$C_z = \frac{3,4}{(1-\nu)} r_0^2 \sqrt{\rho G} . \quad (2.53)$$

L'équation du mouvement devient donc :

$$M_0 \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{3,4}{(1-\nu)} r_0^2 \sqrt{\rho G} \frac{dz}{dt} + \frac{4 Gr_0}{(1-\nu)} z = Q . \quad (2.54)$$

Cette équation décrit en effet le mouvement du solide de Kelvin-Voigt à un degré de liberté schématisé par le modèle de la Fig. 2.23.

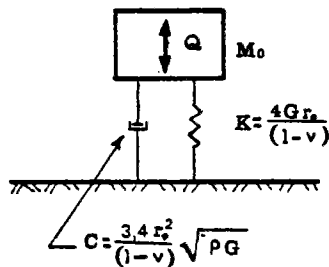


Fig. 2.23 - Modèle de Lysmer simulant le comportement vibratoire des fondations circulaires de rayon r_0 .

Les courbes de réponse pour ce modèle, présentées sur la Fig. 2.24 en lignes pointillées, illustrent le remarquable ajustement qui existe entre le modèle de Lysmer et la théorie de semi-espace élastique.

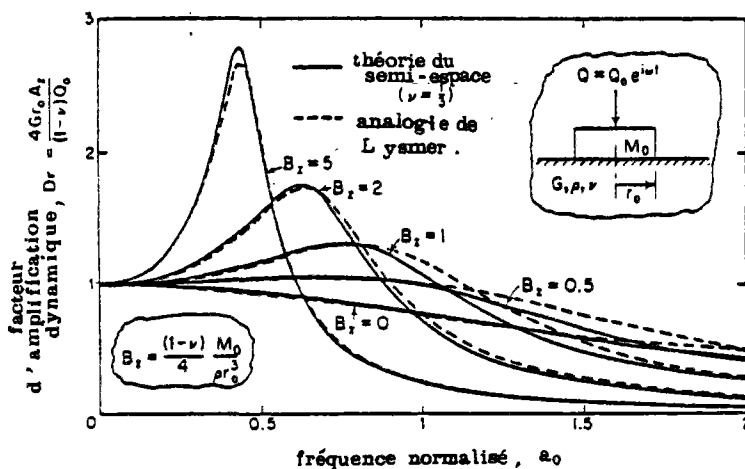


Fig. 2.24 - Courbes de réponse en fréquence pour l'amplitude (relative) de déplacement des fondations circulaires rigides soumises à des charges harmoniques à amplitude constante ; (Lysmer et Richart [75]).

Selon l'Eq. 2.54, le coefficient d'amortissement critique du système sera :

$$C_c = 2 \sqrt{K_z M_0} = 4 \sqrt{\frac{Gr_0 M_0}{(1-\nu)}} ; \quad (2.55)$$

et le taux d'amortissement :

$$\xi = \frac{C_z}{C_c} = \frac{0,425}{\sqrt{B_z}} . \quad (2.56)$$

La fréquence de "résonance" pour $Q = m_e \omega^2 \text{Exp} (i\omega t)$:

$$f_m = \frac{V_s}{2\pi r_0} \sqrt{\frac{0,9}{B_z - 0,45}} \quad (2.57)$$

Lysmer a noté que ces approximations ne fournissent de bons résultats que pour $B_z \geq 1$.

L'amplitude maximale, A_{zm} , et le déphasage du déplacement par rapport à la force centrifuge, ϕ , seront déterminés par les formules suivantes :

$$A_{zm} = \frac{m_e e}{M_0} \frac{B_z}{0,85 \sqrt{B_z - 0,18}} \quad (2.58)$$

$$\phi = \text{Arc tg} \frac{0,85 a_0}{B_z a_0^2 - 1} \quad (2.59)$$

L'intérêt particulier de l'étude de Lysmer résulte du fait qu'elle établit un pont entre la théorie du semi-espace élastique et le système masse-ressort-amortisseur et fournit des valeurs pour les coefficients d'amortissement et de rigidité correspondants.

2.4.8 - Vibration verticale d'une fondation rigide rectangulaire

Des solutions analytiques sont développées également pour les problèmes de charges verticales oscillantes sur une zone rectangulaire de la surface d'un semi-espace élastique par l'intégration de la solution de Lamb. Sung [84] a établi les expressions mathématiques dans le cas d'une charge harmonique uniformément répartie, mais il n'a pas obtenu de valeurs numériques.

Kobori (1962) et Thomson et Kobori (1963), [86], ont suivi la même procédure et ont obtenu les fonctions de déplacement f_1 et f_2 pour le cas d'une charge uniformément répartie sur une surface rectangulaire. Ils ont évalué ces fonctions seulement en termes de déplacement au centre de la zone chargée, ce qui donnait des résultats présentant un amortissement négatif pour certaines valeurs de a_0 . (Un amortissement négatif ne peut pas apparaître dans ce système vibrant).

En 1967, Elorduy, Nieto et Szekely [28] ont superposé les effets de charge uniforme sur des éléments carrés pour arriver ainsi à produire le déplacement uniforme de l'aire rectangulaire sollicitée. Ils ont trouvé, comme le fit Lysmer, que la répartition des contraintes nécessaire pour maintenir un déplacement uniforme varierait selon la fréquence de la vibration. Ils ont évalué certaines de ces distributions et ont calculé les fonctions de déplacement f_1 et f_2 pour une surface chargée carrée ($c/d = 1$) et rectangulaire ($c/d = 2$) pour le cas où $\nu = 0,25$; Fig. 2.25.

Sur la Fig. 2.25 apparaissent aussi les courbes correspondantes de Sung et Bycroft après que le rayon ait été ajusté, pour arriver à une aire circulaire égale à celle du carré ou du rectangle ($r_0 = \sqrt{S/\pi}$, $S = 2C \times 2d$). Puisque ces courbes sont presque les mêmes, il est plus facile, en pratique, d'utiliser la solution d'un calcul d'une base rigide circulaire de même superficie pour évaluer la réponse d'une base rigide rectangulaire.

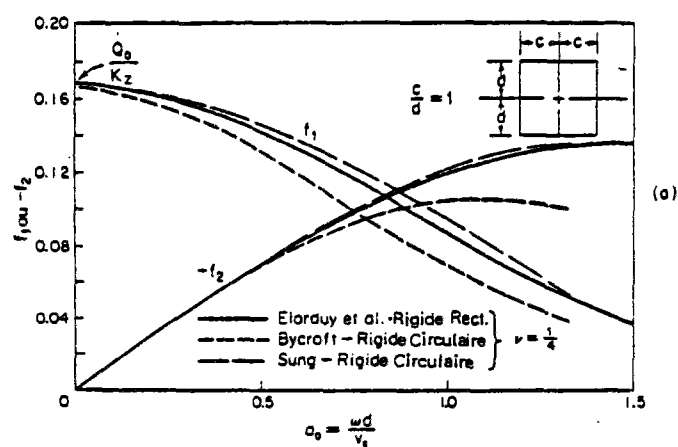
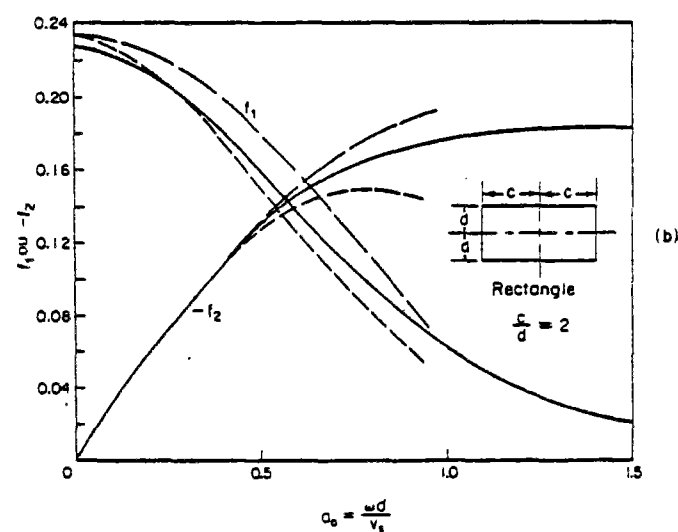


Fig. 2.25 - Fonctions de déplacement des fondations carrées et rectangulaires pour la vibration verticale ; (Richart et al. [75]).



En ce qui concerne les fondations rectangulaires du rapport de longueur à largeur (c/d) très grand, leurs comportements sont plus proches de ceux des fondations de longueur infinie dont la solution numérique pour une distribution du type de "fondation rigide" a été donnée par Quinlan (voir § 2.4.3).

Pour une fondation de rapport c/d moyen, la fréquence de "résonance" devrait se situer dans les limites données par la théorie des fondations rigides circulaires et celle d'une fondation filante rigide (cas bidimensionnel, déformation plane).

2.4.9 - L'influence du substratum rigide

Il s'agit des cas où le massif semi-infini du sol est remplacé par une couche élastique d'épaisseur H et de dimensions "horizontales" infinies qui est limitée à sa base par un massif semi-infini entièrement rigide ; les déplacements (u, v, w) de la couche à l'interface sont nuls. Ce problème a été traité pour la vibration verticale des fondations circulaires rigides par Arnold et al (1959) [1], Bycroft (1956) [13] et Warburton (1957) [94]. Il a été constaté que la distribution de contraintes correspondant à la fondation rigide (Eq. 2.36) n'assure pas le tassement uniforme de la fondation, même dans le cas de chargement statique. Les courbes de la Fig. 2.26, établies par Bycroft, indiquent les variations en fonction de H/r_0 , d'une part, du rapport entre le tassement moyen statique de la fondation sur la couche (avec substratum), Z_s , et celui (uniforme) correspondant au massif semi-infini élastique, $Z_{s\infty}$, et d'autre part du rapport entre la rigidité élastique des deux cas précédents (K/K_∞) . A noter que le rapport des rigidités ne varie notablement que pour les valeurs de H/r_0 inférieures à 1.

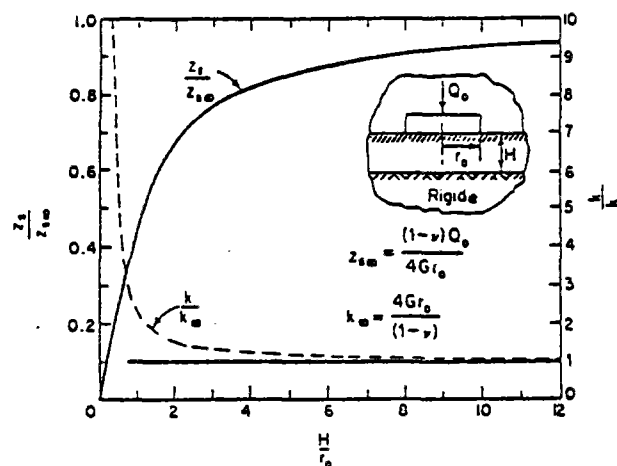


Fig. 2.26 - Déplacement statique et coefficient de rigidité des fondations circulaires surmontant un monocouche élastique d'épaisseur H ; (d'après Bycroft [13]).

En ce qui concerne le comportement sous charges harmoniques, Bycroft a résolu le cas particulier où $b = 0$ qui correspond à un disque rigide sans masse. Cette solution a été développée par Warburton pour $b > 0$.

La variation de la fréquence de "résonance" (fréquence correspondant à l'amplitude maximale) en fonction du facteur de masses a été calculée par Warburton pour différentes valeurs de H/r_0 ; Fig. 2.27.

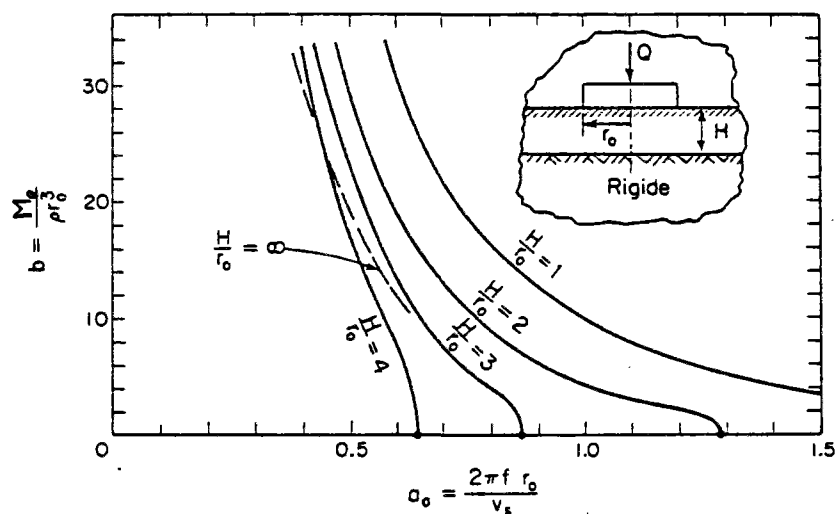


Fig. 2.27 - Relation entre le facteur de masses et la fréquence de "résonance" d'un monocouche élastique surmonté par une fondation circulaire rigide ; (d'après Warburton [94]).

A partir des valeurs du facteur d'amplification dynamique, calculées par Warburton, Richart et al. (1970) [75] ont établi la tableau suivant pour les valeurs de D_{LM} , qui représente le rapport entre l'amplitude de déplacement maximal sous charge harmonique ($Q = Q_0 \text{Exp}(i \omega t)$) et le déplacement statique relatif au semi-espace élastique correspondant ($Z_{s\infty}$). Ces auteurs soulignent par ailleurs que les valeurs théoriques du "facteur d'amplification dynamique" D_{LM} , sont relativement élevées, or en réalité les faibles valeurs de l'amortissement interne des sols auraient pour effet de réduire fortement l'amplification dynamique du système considéré.

$\frac{H}{r_0}$	D_{LM}				
	$b = 0$	$b = 5$	$b = 10$	$b = 20$	$b = 30$
1	∞	5.8	11.4	20.5	28.9
2	∞	8.0	16.1	30.6	40.8
3	∞	4.7	9.5	23.7	36.0
4	∞	(3.4)	5.9	15.6	27.9
∞	1	1.21	1.60	2.22	2.72

Tableau 2.1 - Facteur d'amplification dynamique (amplitude relative) des vibrateurs circulaires surmontant un monocouche élastique (de coefficient de Poisson 0,25 ; [75]).

2.5 - AMORTISSEMENT DE LA VIBRATION DU SYSTEME VIBRATEUR-SOL

Comme il a été démontré au § 2.4, la vibration verticale du couple vibreur-semi-espace élastique s'amortit en raison de la radiation des ondes élastiques depuis la zone de contact jusqu'à l'infini dans le massif. Cet amortissement est appelé l'"amortissement géométrique" et il est différent de l'amortissement dû au comportement hystérétique des sols (amortissement "interne" ou structurel).

Dans la réalité, l'amortissement du système est le résultat de ces deux amortissements : par conséquent, le taux d'amortissement des modèles à paramètres concentrés (masse-ressort-amortisseur), ξ , doit représenter, théoriquement, l'amortissement total des cas réels :

$$\xi_{\text{total}} = \xi_{\text{géom.}} + \xi_{\text{int.}} \quad (2.60)$$

2.5.1 - L'amortissement géométrique

D'après l'Eq. 2.56 de l'analogie de Lysmer, le taux d'amortissement géométrique d'une fondation circulaire est proportionnel à $M_0^{-0,5}$, $(1-\nu)^{-0,5}$, $\rho^{0,5}$ et $r_0^{1,5}$. Elle indique en plus l'importance notable de variations du rayon de la base circulaire par rapport aux autres paramètres concernés. Quant aux fondations des machines vibrantes, le taux d'amortissement géométrique moyen est environ 0,40 ; [75]. Selon Catoire [18], il est environ 0,30 dans le cas des plaques vibrantes. Il doit être encore plus faible pour les rouleaux vibrants, compte tenu des faibles surfaces d'empreintes sur le sol.

A titre d'exemple, considérons le cas d'un rouleau vibrant dont :

- le poids de la bille, $W_0 = M_0 g = 30 \text{ KN}$
- la longueur " " , $L = 2 \text{ m}$.

Pour une largeur de l'empreinte de la bille ($l \approx 0,20 \text{ m}$) sur un sol caractérisé par un poids volumique $\gamma = 20 \text{ KN/m}^3$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0,25$, suivant les Eqs. 2.49 et 2.56, nous avons :

$$B_z = 6,19$$

et

$$\xi_{\text{géom.}} = \frac{0,425}{\sqrt{B_z}} = 0,17$$

On peut considérer la valeur de 0,20 comme étant la valeur moyenne de l'amortissement géométrique des rouleaux vibrants.

Notons enfin que dans l'exemple ci-dessus, nous avons négligé l'effet de la vibration du châssis du rouleau sur la réponse dynamique de l'ensemble bille-sol.

2.5.2 - Amortissement interne des sols

Les essais de chargement cyclique, effectués sur des modèles réduits, ont mis en évidence le comportement hystérétique des sols qui transforment une partie de l'énergie mécanique en chaleur. Dans le cas des sols pulvérulents relativement secs, cette "perte" de l'énergie appliquée est due au frottement des grains.

La mesure de l'amortissement interne se fait soit par enregistrement des boucles de contrainte-déformation lors d'une sollicitation harmonique - Fig. 2.28, soit par la mesure de décrement de l'amplitude de vibration libre de l'échantillon considéré.

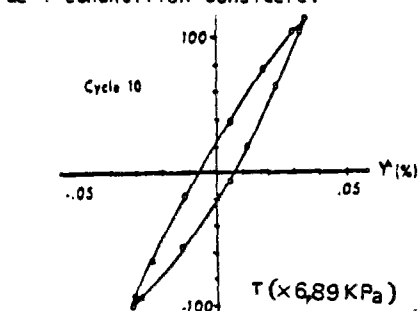


Fig. 2.28 - Boucle d'hystérésis d'un sable; [82].

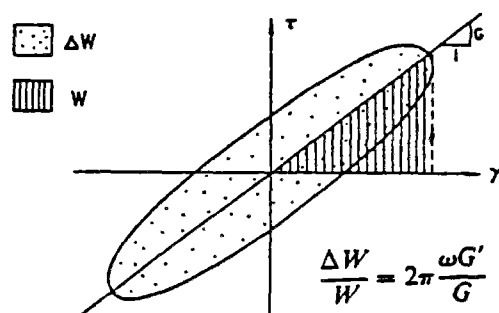


Fig. 2.29 - Boucle d'hystérésis du solide de Kelvin-Voigt.

La première méthode repose sur des essais triaxiaux, de cisaillement simple et de cisaillement en torsion sous charges cycliques dans lesquels l'amplitude de déformation se situe entre 10^{-4} et $0,5 \cdot 10^{-2}$, [82]. La boucle d'hystérésis étant tracée, l'amortissement interne correspondant est défini généralement par la relation ci-dessous :

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W} \quad (2.61)$$

dans laquelle, ΔW est l'aire de la boucle et W est égal à l'énergie maximale qui serait appliquée à l'échantillon s'il était purement élastique de module de cisaillement G .

La deuxième méthode est celle de la colonne de résonance, qui consiste à étudier la réponse d'une colonne cylindrique de sable à des vibrations forcées. La mesure du décrement de l'amplitude se fait après une rupture brutale de l'excitation. L'amplitude maximale de déformations est en général inférieure à 10^{-3} . z_n étant l'amplitude de la n ème période, le décrement de l'amplitude :

$$\delta = \ln \frac{z_n}{z_{n+1}} \quad ; \quad (2.62)$$

aussi $\frac{\Delta W}{W} = 2\delta \quad (2.63)$

Quoique n'étant pas visqueux, les sols ont en général des boucles d'hystérésis qui sont à peu près similaires à celle des solides viscoélastiques, qui est une ellipse - Fig. 2.29.

C'est pourquoi on utilise le comportement viscoélastique dans des études analytiques. La relation de contrainte-déformation correspondant à la courbe de la Fig. 2.29 s'écrit :

$$\tau = \tilde{G} \tilde{\gamma}, \quad (2.64)$$

où $\tilde{\tau}$ est la contrainte de cisaillement dans le plan complexe ; $\tilde{\gamma}$ est la déformation correspondante et \tilde{G} est le module de cisaillement,

$$\tilde{G} = G + i \omega G', \quad (2.65)$$

pour lequel le rapport de la partie imaginaire à la partie réelle est donné par l'équation ci-dessous :

$$\frac{\omega G'}{G} = \operatorname{tg} \phi_L = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W}, \quad (2.66)$$

dans laquelle, $\operatorname{tg} \phi_L$ représente le déphasage entre la contrainte et la déformation - Fig. 2.30.

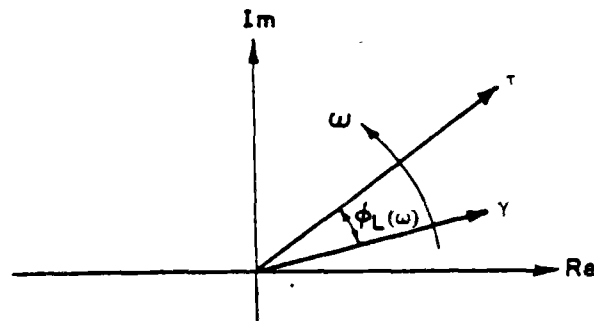


Fig. 2.30 - Représentation dans le plan complexe des contraintes et déformations.

Lorsqu'il s'agit du solide de Voigt ($G' = \text{constante}$) de taux d'amortissement relativement faible ($\xi \leq 0,3$), nous avons :

$$\frac{\omega G'}{G} = \frac{\delta}{\pi}; \quad (2.67)$$

$$\text{et} \quad \delta = \frac{2 \pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \approx 2 \pi \xi; \quad (2.68)$$

ce qui donne :

$$\xi = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta W}{W} = \frac{1}{2} \lambda. \quad (2.69)$$

L'amortissement interne des sols varie en fonction de divers paramètres tels que l'amplitude des déformations, la fréquence de la vibration, l'indice des vides et la contrainte effective moyenne. Dans une étude expérimentale et comparative, [42], Hardin et Drenvich analysent les variations des propriétés dynamiques ($G, \frac{\Delta W}{W}$) des sols pulvérulents et cohésifs en fonction de treize paramètres et classent ces paramètres suivant leur importance pour chaque type de sol. Le paramètre le plus important, selon cette étude, est l'amplitude des déformations - Comme on le voit sur la Fig. 2.31, l'amortissement et le module de cisaillement varient tous les deux avec l'amplitude des déformations. Nous ne nous intéresserons, ici, qu'à l'influence de l'amplitude sur l'amortissement du matériau, car, en effet, nous n'avons pas de moyen théorique suffisant pour étudier les effets de non linéarité du massif semi-infini.

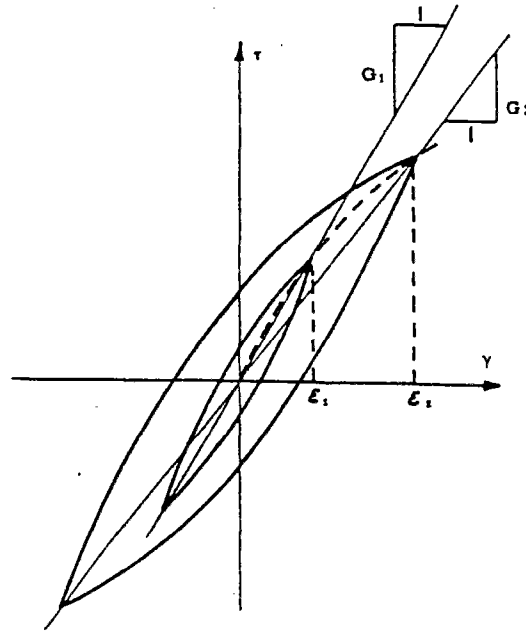


Fig. 2.31 - Boucle d'hystérésis pour différentes amplitudes de déformations.

Le rôle de l'amplitude des déformations

Le rôle de l'amplitude des déformations fait l'objet de l'étude expérimentale de Silver et Seed [82], qui ont adapté l'appareil de cisaillement cyclique pour les essais avec de grandes déformations (de 0,0001 à 0,01). Comme on le voit sur la Fig. 2.32, l'amortissement interne s'accroît avec l'amplitude de déformations ; le taux d'amortissement (Eq. 2.69) est d'environ 0,15, pour les déformations de l'ordre de 10^{-3} et il est près de 0,05 pour les déformations comprises entre 10^{-5} et 10^{-4} .

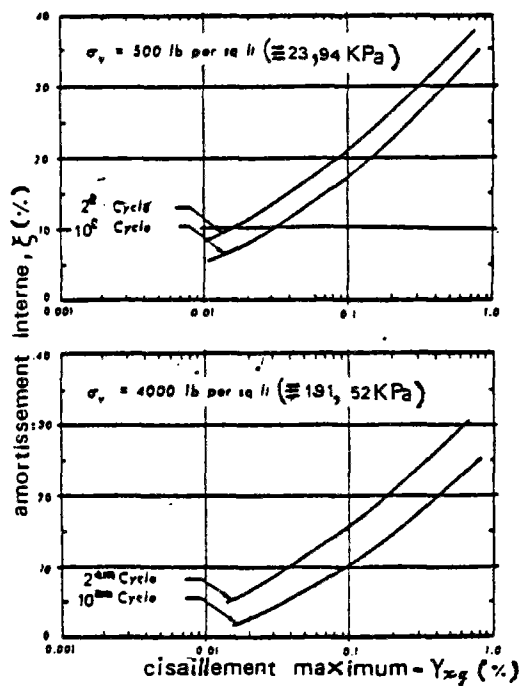


Fig. 2.32 - Variation de l'amortissement interne d'un sable en fonction de l'amplitude des déformations, du nombre de cycles et de la contrainte verticale au cours d'un essai de cisaillement cyclique ; (Silver et Seed [82]).

Nous soulignons ici l'importance de l'amplitude des déformations, car elle constitue un facteur essentiel de différence entre les fondations des machines vibrantes et les rouleaux.

Les dimensions des fondations des machines sont en général conçues de façon telle que l'amplitude des déformations du sol ne dépasse pas la valeur de 0,001, ce qui a pour effet de rendre négligeable l'"influence" de l'amortissement interne du massif ($\xi < 0,05$) par rapport à celle de l'amortissement géométrique du système soumis à la vibration verticale ($\xi \geq 0,40$).

Par contre, dans le cas des rouleaux vibrants, les amplitudes des déformations étant de l'ordre de 0,01, l'effet de l'amortissement interne correspondant ($\xi = 0,15$) ne devrait plus être négligé. Cela d'autant plus qu'en raison de leurs géométries particulières les rouleaux vibrants sont affectés par des amortissements géométriques relativement faibles ($\xi = 0,20$).

2.5.3 - Amortissement "interne" et total du système vibrant

Veletsos et Verbic (1973) ont fait une étude analytique sur la réponse du système vibreur-massif semi-infini, ce dernier étant supposé milieu viscoélastique linéaire. La base du vibreur est un cercle dans lequel la répartition des contraintes d'interaction est supposée du type "fondation rigide". Les courbes des fonctions de déplacement (f_1 et f_2) relatives aux trois valeurs de l'amortissement interne ($\delta = 0,1\pi$, $0,3\pi$ et $0,5\pi$) sont ainsi tracées pour $0 \leq a_0 \leq 5$. Les auteurs établissent ensuite l'équation de mouvement du vibreur qui correspond à celle d'un modèle viscoélastique à un degré de liberté. Cette équation est similaire à l'équation de Hsieh (Eq. 2.45) avec la différence que, pour éviter les valeurs négatives de K que l'on rencontre ici lorsque $a_0 > 2$, la masse du modèle est égale à la masse du vibreur plus une "masse ajoutée" du sol dont la valeur dépend de B_z (Eq. 2.49) et a_0 .

Le rôle de la fréquence normalisée

Les résultats de cette étude démontrent que pour les valeurs de a_0 supérieures à 1,0 l'augmentation de l'amortissement total du système ($a_0 = \text{cte.}$) par rapport à son amortissement géométrique est presque proportionnelle à l'augmentation de l'amortissement interne du sol. Par ailleurs, pour une valeur constante de δ , cet écart diminue lorsque a_0 augmente et pourrait être même négligeable pour les valeurs de $a_0 > 2,0$ - Fig. 2.33.

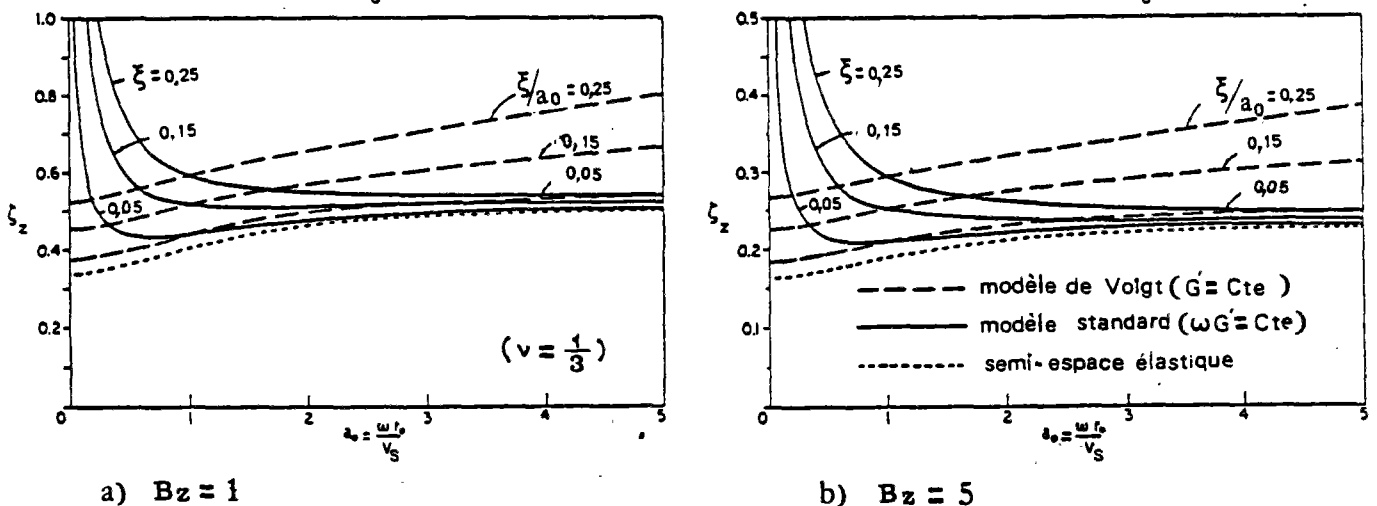


Fig. 2.33 - Variation du taux d'amortissement global du système sol-vibreur circulaire en fonction de la fréquence normalisée pour différentes valeurs d'amortissement interne du sol ; (d'après Veletsos et Verbic [90]).

En revanche, dans les cas où $a_0 \leq 1$ et pour une valeur donnée de δ , cet écart s'accroît considérablement lorsque a_0 diminue et cela, notamment, en raison de l'augmentation accentuée de l'amortissement total.

Cette constatation indique l'importance de l'amortissement interne du sol sur la réponse des rouleaux vibrants pour lesquels la valeur moyenne de la fréquence normalisée, a_0 , est d'environ 0,75.

Le rôle du facteur de masses

Le résultat le plus intéressant de l'étude de Veletsos et Verbic est la mise en évidence de la relation qui existe entre l'amortissement total et le facteur de masses du système sol-vibrateur : la comparaison des courbes de la Fig. 2.33(a) ($B_z = 1$) et celle de la Fig. 2.33(b) ($B_z = 5$) montre en effet que non seulement l'amortissement géométrique, mais aussi l'amortissement "interne" du système, diminuent lorsque B_z augmente. A titre d'exemple considérons le cas où $a_0 = 0,75$ et $\xi_{int} = 0,15$; selon les courbes des Figs 2.33, nous pouvons établir le tableau ci-dessous :

$$\xi_{int} = \xi_{total} - \xi_{géom.}$$

$B_z \backslash \xi$	Amortissement géométrique (Figs. 2.33)	Amortissement géométrique (Lysmer)	Amortissement total (Fig. 2.33)	Amortissement "interne"
1	0,37	0,42	0,56	0,19
5	0,18	0,19	0,30	0,12

Tableau 2.2 - Le taux d'amortissement géométrique, total et "interne" du couple sol-vibrateur pour $a_0 = 0,75$ et l'amortissement interne du sol, $\xi_{int} = 0,15$; ($\omega G = cte$).

L'importance du facteur de masses nous amène à étudier le rôle du paramètre dont il dépend en premier lieu, c'est-à-dire de r_0 .

Dans les limites des grandeurs des paramètres caractéristiques des rouleaux vibrants, une diminution de r_0 a pour effet d'augmenter le facteur de masses (B_z est proportionnel à r_0^{-3}) et, par ailleurs, de diminuer la fréquence normalisée ($a_0 = \frac{\omega r_0}{v_s}$). Or comme on le voit dans les Figs 2.33(a) et 2.33(b), ces deux variations s'opposent en ce qui concerne l'amortissement global du système. En effet, le taux d'amortissement total diminue lorsque B_z augmente, mais il augmente dans le cas où a_0 diminue.

Toutefois, la sensibilité de B_z par rapport à r_0 est telle que le taux d'amortissement total du système diminue avec r_0 comme c'est le cas pour les massifs purement élastiques (Fig. 2.18). Le tableau ci-dessous indique un exemple dans lequel nous avons supposé que ($r_0 = 1$) correspond à ($B_z = 5$ et $a_0 = 0,30$).

r_0	B_z	a_0	ξ_{tot}
1,0	5	0,30	0,37
1,71	1	0,57	0,57

Tableau 2.3 - amortissement total du système vibrateur-massif viscoélastique pour deux valeurs de r_0 ; (Figs. 2.33(a) et (b)) - ($\omega G = cte$).

En conclusion, les principaux résultats de l'étude sur l'amortissement des systèmes considérés sont les suivants :

- contrairement aux fondations des machines, l'amortissement interne des systèmes sol-rouleaux vibrants n'est pas négligeable vis-à-vis de l'amortissement géométrique.

- l'amortissement interne du couple sol-vibrateur n'est pas nécessairement proportionnel à l'amortissement interne du sol donné par les essais de laboratoire ; il varie en fonction de B_z et de a_0 .

- l'amortissement total du couple vibrateur-massif viscoélastique (tel que celui, géométrique, du couple vibrateur-massif purement élastique) diminue avec la surface de contact du vibrateur avec le sol.

2.6 - ANALYSE DU COMPORTEMENT DE L'ENSEMBLE SOL-ROULEAU VIBRANT-APPLICATION DES THEORIES DU MASSIF SEMI-INFINI

La plupart des théories précédentes, c'est-à-dire les théories du massif semi-infini ainsi que celles des modèles discrets correspondants, ont été confirmées par de nombreux essais in-situ et des constatations relatives aux fondations des machines vibrantes. Citons à titre d'exemple les expérimentations réalisées en U.R.S.S. par Barkan [7], [8] et Shekter [81], les essais sur les vibreurs Goodman faits aux Laboratoires des Ponts et Chaussées en France [12] et enfin les expérimentations sur les plaques vibrantes effectuées par California Institute of Technology aux Etats-Unis, [14], [15] et [16] (voir aussi Catoire(1966), [18]).

Mais en ce qui concerne les rouleaux vibrants, l'application de ces théories se heurte aux particularités suivantes :

- décollement de la bille du sol lorsque la force d'interaction dépasse le double de la charge statique ;
- variabilité de l'aire de contact ;
- translation horizontale du rouleau ;
- vibration du châssis.

Toutefois, étant donné qu'ici ce sont plutôt les valeurs relatives des paramètres et leurs évolutions - d'une passe à l'autre, d'un matériau à l'autre, ... qui servent de base pour les études de l'efficacité ou du contrôle, la schématisation même simpliste du comportement vibratoire du système sol-rouleau au moyen des modèles mathématiques précédents présente, à notre avis, des avantages considérables.

2.6.1 - Les hypothèses simplificatrices relatives aux couples sol-rouleaux vibrants

Se limitant au cas des compactages couplés, rappelons les hypothèses simplificatrices complémentaires suivant lesquelles nous appliquons ces modèles :

1 - Le sol est un matériau élastique ou viscoélastique linéaire dont le module d'élasticité et de viscosité varient d'une passe à l'autre.

Selon cette hypothèse, nous négligeons les déformations irréversibles qui se produisent à chaque cycle de la vibration ; ceci est acceptable lorsque le matériau n'est plus en état foisonné ; autrement dit, le comportement du système n'est considéré qu'à partir de la deuxième ou troisième passe.

2 - La largeur de l'empreinte ne varie que d'une passe à l'autre.

Nous supposons que pendant un cycle de la vibration, la largeur d'empreinte oscille très légèrement autour de sa valeur moyenne correspondant à la charge totale "statique", c'est-à-dire la largeur de l'empreinte lorsque le rouleau ne vibre pas. Ceci est vrai dans les cas où les sollicitations sont suffisamment inférieures à celles qui créent le désaccouplement.

3 - Les interactions horizontales sont négligeables.

Il s'agit des cas où, à chaque instant, la composante horizontale de la force centrifuge est nulle, c'est-à-dire les cas où la bille est munie de deux balourds égaux qui tournent symétriquement dans deux sens inverses. Cela étant, les forces tangentielles créées par le roulement de la bille sont généralement négligeables.

4 - Le déplacement horizontal du rouleau ne modifie pas la réponse du massif du sol.

La vitesse de déplacement horizontal du rouleau étant très faible (inférieure à 3m/sec) vis-à-vis de la vitesse de propagation des ondes élastiques dans le massif (environ 100 m/sec), l'influence de ce facteur est négligeable ; (voir [52] et [32]).

Rappelons enfin que, par souci de simplicité, nous utilisons le modèle à un degré de liberté en négligeant l'influence de la vibration du châssis sur la réponse du couple bille-sol ; Car, en ce qui concerne le rôle du massif, cette approximation ne nuit pas à la généralité de la théorie, dans la mesure où la fréquence propre du châssis se situe, en général, à l'extérieur du domaine des fréquences pratiques : normalement, elle est inférieure à $10 H_z$.

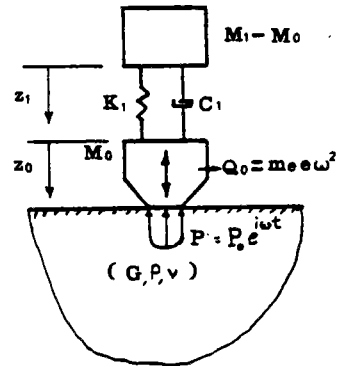
La solution complète du comportement vibratoire du compacteur s'obtient à partir des équations suivantes : (Fig. 2.34)

$$M_0 \frac{d^2 z_0}{dt^2} + C_1 \frac{d}{dt} (z_0 - z_1) + k_1 (z_0 - z_1) = m_e \omega^2 \exp i(\omega t + \alpha) + P_0 \exp (i\omega t), \quad (2.70.a)$$

$$(M_1 - M_0) \frac{d^2 z_1}{dt^2} + C_1 \frac{d}{dt} (z_1 - z_0) + K_1 (z_1 - z_0) = 0 \quad (2.70.b)$$

$$(P_0 \leq M_1 g)$$

Fig. 2.34 - Modèle à deux degrés de liberté.



pour lesquelles l'état initial correspond à l'état sous charges statiques (poids). Si l'on accepte l'hypothèse de déformations planes :

$$z_0 = \frac{P_0 \exp(i\omega t)}{G} (f_3 + if_4) ,$$

et dans ce cas M_0 , M_1 , C_1 et K_1 désignerons les valeurs correspondant à l'unité de longueur du rouleau ; (voir Eqs. 2.19, 2.20 et 2.32).

Il convient de remarquer que la largeur moyenne de l'empreinte dépend de la charge statique totale, $M_1 g$, et que le poids du châssis a pour effet d'élargir le domaine des fréquences dans lequel le compactage est couplé (il n'y a pas de désaccouplage). Autrement dit, il permet au compacteur d'introduire dans le sol de grandes accélérations ($\omega^2 A$) sans qu'il n'y ait de décollement.

2.6.2 - Variations de l'amplitude de déplacement du rouleau en fonction du module d'élasticité et de la masse volumique du sol.

Compte tenu de la similitude entre le massif viscoélastique et le massif purement élastique, et comme il s'agit d'une étude comparative, nous utilisons les formules relatives au cas élastique parfait en assimilant le rouleau à une fondation rigide circulaire dont l'aire est égale à l'aire de l'empreinte de la bille :

$$r_0 = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{\ell \cdot L}{\pi}} . \quad (2.71)$$

Au cours d'un compactage, d'une passe à l'autre, la masse volumique, ρ , et le module de cisaillement, G , augmentent. Le coefficient de Poisson est supposé constant.

La fréquence normalisée varie donc de la manière suivante :

$$a_0 = \frac{2\pi f r_0}{\sqrt{G/\rho}} , \quad (f = \text{cte.}) , \quad (2.72)$$

$$\frac{\Delta a_0}{a_0} = \frac{\Delta r_0}{r_0} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta G}{G} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho} \quad (2.73)$$

et
$$\frac{\Delta r_0}{r_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta \ell}{\ell} . \quad (2.74)$$

Supposons que la largeur de l'empreinte, l , varie, comme c'est le cas en élasto-statique, avec l'inverse de la racine carrée du module d'élasticité :

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta G}{G} \quad (2.75)$$

d'où
$$\frac{\Delta a_0}{a_0} = -\frac{\Delta G}{G} + \frac{1}{2} \frac{\Delta \rho}{\rho} \quad (2.76)$$

et si l'on considère que normalement :

$$\frac{\Delta G}{G} \gg \frac{\Delta \rho}{\rho} \quad , \quad \left(\frac{\Delta v_s}{v_s} > 0 \right) ;$$

on a :

$$\frac{\Delta a_0}{a_0} < 0 \quad .$$

De même façon, la variation du facteur de masses, $b = \frac{M_0}{\rho r_0^3}$ est :

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{3}{4} \frac{\Delta G}{G} - \frac{\Delta \rho}{\rho} \quad , \quad (2.77)$$

$$\left(\text{si } \frac{3}{4} \frac{\Delta G}{G} > \frac{\Delta \rho}{\rho} \right) \quad \frac{\Delta b}{b} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta \xi}{\xi} < 0 \quad .$$

Selon les schémas de la Fig. 2.33 trois cas sont possibles (voir aussi la Fig. 2.18) :

1 - $\omega \ll \omega_m$ ($a_0 \ll a_{0m}$)

alors $\frac{\Delta A}{A} > 0$.

2 - $\omega \approx \omega_m$, alors :

soit $\frac{\Delta A}{A} > 0$,

soit $\frac{\Delta A}{A} < 0$.

Mais sur plusieurs passes la valeur moyenne de A augmente.

3 - $\omega \gg \omega_m$,

alors : $\frac{\Delta A}{A} < 0$.

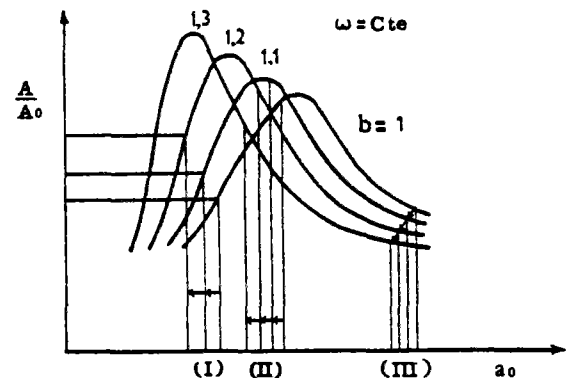


Fig. 2.35 - Schémas des courbes de réponse en amplitude relative pour différents degrés de compacité du matériau.

L'approche (simpliste) ci-dessus indique que, dans les cas où l'augmentation relative du module d'élasticité est plus rapide que celle de la masse volumique (ou la densité sèche), l'amplitude de la vibration du rouleau au cours des passes successives pourrait :

- augmenter régulièrement,
- augmenter en valeur moyenne,
- diminuer régulièrement.

Le troisième cas peut être écarté en raison du désaccouplage qui se produit aux fréquences élevées.

Considérons le cas inverse dans lequel, d'une passe à l'autre, le module baisse alors que la compacité du sol augmente. Cela correspond au cas d'un sol cohésif qui, ayant un degré de saturation élevé, perd sa résistance mécanique à partir d'un certain taux de compacité (phénomène du coussin de caoutchouc) :

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} > 0, \text{ mais } \frac{\Delta G}{G} < 0 ;$$

donc : $\frac{\Delta a_0}{a_0} > 0 ,$

et $\frac{\Delta b}{b} < 0 = \frac{\Delta \xi}{\xi} > 0$

L'amortissement (géométrique et global) et la fréquence normalisée, tous les deux, augmentent. Suivant les schémas de la figure précédente, pour les fréquences inférieures et les fréquences égales ou légèrement supérieures à celles de "résonance", l'amplitude de la bille diminue régulièrement ou de façon alternative.

Les considérations ci-dessus nous amène à penser que les variations alternatives irrégulières de l'amplitude de la bille avec le nombre de passes, enregistrées au cours des essais de Vibrex au C.E.R. de Rouen, ne sont pas nécessairement dues à l'imprécision des mesures ; elles sont conformes à la réalité physique dans les domaines des valeurs des paramètres concernés - Fig. 2.36.

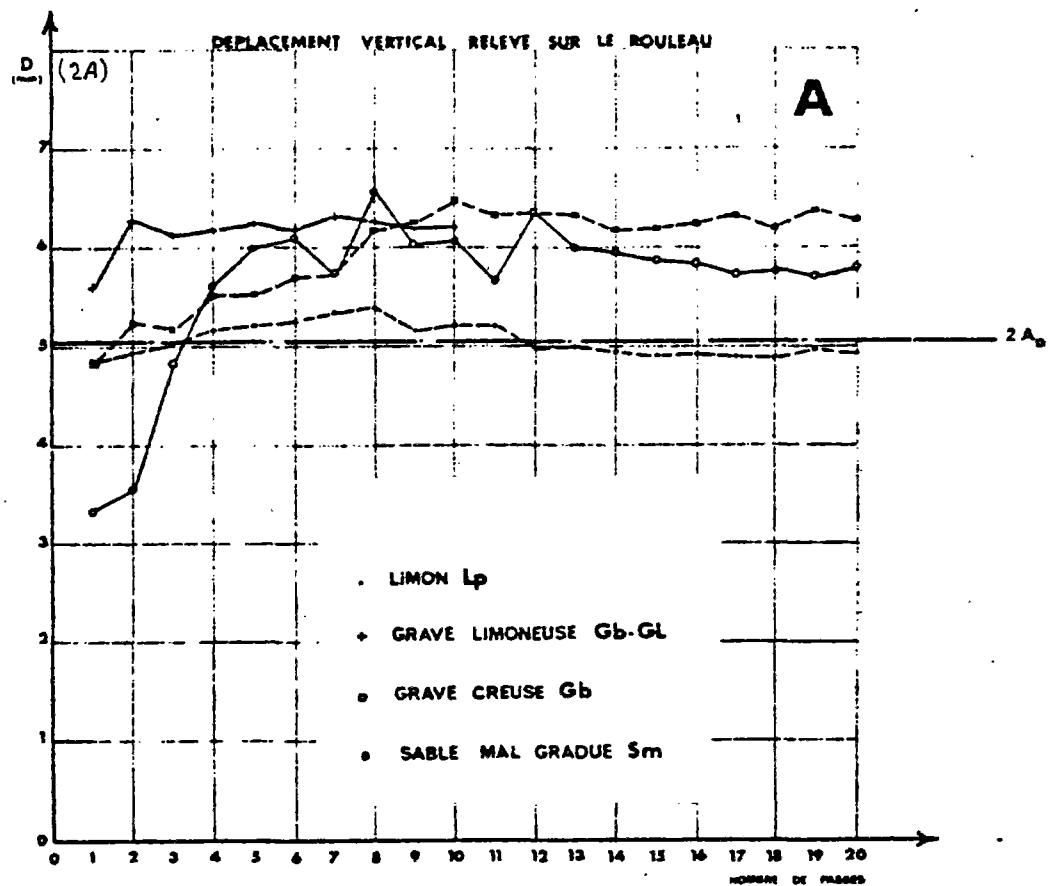


Fig. 2.36 - Variations de l'amplitude de déplacement de la bille avec le nombre de passes (d'après Chaigne et al. [19]).

Cette constatation présente un intérêt pratique dans la mesure où plusieurs études sont en cours pour la mise en application des procédés de contrôle de compactage par la détection et l'interprétation des paramètres vibratoires du rouleau, tels que l'amplitude de déplacement ou l'accélération ; [26].

Notons enfin que l'influence considérable des variations du module d'élasticité sur la réponse du système est due, dans une grande mesure, à la variabilité de la surface de contact ou bien de la largeur de cette surface, λ . Or, si la surface de contact était invariable, comme il en est ainsi avec des plaques vibrantes ou des fondations superficielles, l'amortissement géométrique -et global- du système ne varierait que très légèrement avec le compactage et cela dans le sens inverse : plus le matériau serait compacté, plus le mouvement vibratoire du système serait amorti, (voir aussi les Eqs 2.49 et 2.56).

2.6.3 - Variations de la fréquence de résonance, f_m , avec G et ρ

Considérons la réponse en fréquence (normalisée) d'un rouleau donné avec deux sols différents et supposés comme étant "complètement" compactés :

$$\begin{aligned} \text{soit :} \quad & G_2 > G_1 ; \\ & \rho_2 > \rho_1 ; \quad \left(\text{et } \left(\frac{G_2}{G_1} \right)^{\frac{1}{2}} > \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) ; \\ \text{et} \quad & v_2 = v_1 . \end{aligned}$$

$$\text{Nous avons donc : } b_2 > b_1 ,$$

$$\text{et : } (B_z)_2 > (B_z)_1 ,$$

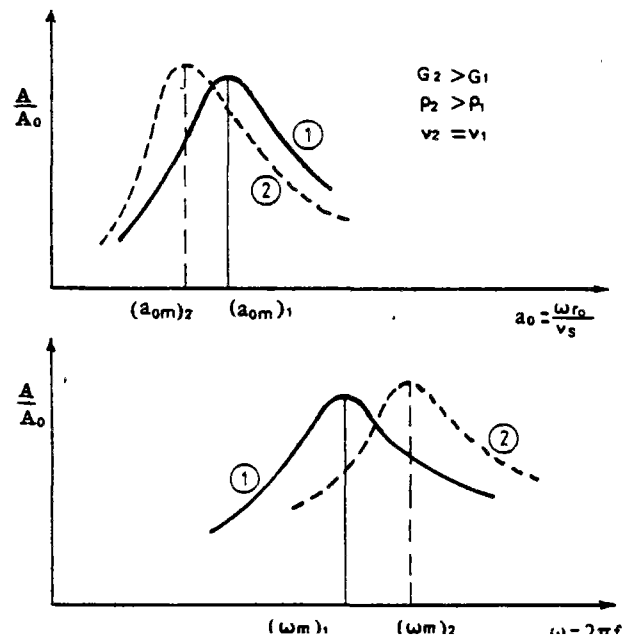
$$\text{d'où : } (A_m)_2 > (A_m)_1 .$$

D'après le graphique de la Fig. 2.22, les fréquences normalisées correspondant à l'amplitude maximale dans deux cas sont telles que :

$$(a_{0m})_2 < (a_{0m})_1$$

On peut donc schématiser la réponse en amplitude (normalisée) de deux systèmes par les courbes de la Fig. 2.37.

Fig. 2.37 - Variation de la réponse en amplitude relative de l'ensemble sol-rouleau vibrant avec la variation des caractéristiques mécaniques du sol.



Quel est le rapport entre les fréquences de résonance f_{m1} et f_{m2} des deux matériaux ?

La relation entre deux fréquences est donnée par la formule ci-dessous :

$$\frac{(\omega_m)_2}{(\omega_m)_1} = \frac{(a_{0m})_2}{(a_{0m})_1} \cdot \left(\frac{G_2}{G_1}\right)^{0,50} \cdot \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{0,50} \cdot \left(\frac{r_{01}}{r_{02}}\right) \quad (2.78)$$

Mais suivant l'hypothèse de l'empreinte circulaire équivalente :

$$\frac{r_{01}}{r_{02}} = \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{0,5} = \left(\frac{G_2}{G_1}\right)^{0,25},$$

$$\text{d'où : } \frac{(\omega_m)_2}{(\omega_m)_1} = \frac{(a_{0m})_2}{(a_{0m})_1} \cdot \left(\frac{G_2}{G_1}\right)^{0,75} \cdot \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{0,50}, \quad (2.79)$$

dans laquelle, a_{0m} dépend de G et ρ correspondants.

D'après l'Eq. 2.57 de l'analogie de Lysmer, on peut écrire :

$$\frac{(a_{0m})_2}{(a_{0m})_1} = \left(\frac{B_{z1} - 0,45}{B_{z2} - 0,45}\right)^{0,50} \quad (2.80)$$

Compte tenu de la valeur relativement grande du facteur de masses, B_z , des rouleaux vibrants (environ 5), on accepte la simplification suivante :

$$\frac{(a_{0m})_2}{(a_{0m})_1} = \left(\frac{B_{z1}}{B_{z2}}\right)^{0,50};$$

$$\text{ou } \frac{(a_{0m})_2}{(a_{0m})_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{0,5} \left(\frac{G_1}{G_2}\right)^{\frac{3}{8}};$$

$$\text{d'où : } \frac{(\omega_m)_2}{(\omega_m)_1} = \left(\frac{G_2}{G_1}\right)^{\frac{3}{8}}. \quad (2.81)$$

Par conséquent, dans le cas ci-dessus où $G_2 > G_1$,

$$(f_m)_2 > (f_m)_1$$

(Nous n'avons pas utilisé directement l'Eq. 2.57, car nous voulions indiquer le rapport entre les fréquences normalisées (a_0) et les fréquences correspondantes, f).

L'eq. 2.57 correspond au cas du massif purement élastique. Or, d'après ce que nous avons vu au § 2.4, la fréquence de résonance, f_m , diminue avec l'amortissement interne du sol. Par conséquent, l'inégalité ci-dessus pourrait changer le sens en fonction du rapport des amortissements internes des deux systèmes considérés.

La Fig. 2.38 indique la réponse en fréquence pour l'amplitude de déplacement d'un rouleau (Vibrex) avec quatre matériaux différents. Il s'agit d'un limon naturel ($h = 30$ cm) avec quatre teneurs en eau de mise en place différentes. Dans chaque cas, l'essai correspondant a commencé à la suite du compactage maximum (64 passes) de la couche avec le même rouleau.

D'après les résultats des mesures de la densité sèche finale -indiqués dans la figure ^{2.38} et ceux de la force totale appliquée, on peut écrire :

$$\rho_3 > \rho_2 > \rho_1 > \rho_4$$

$$G_3 > G_4 > G_2 > G_1$$

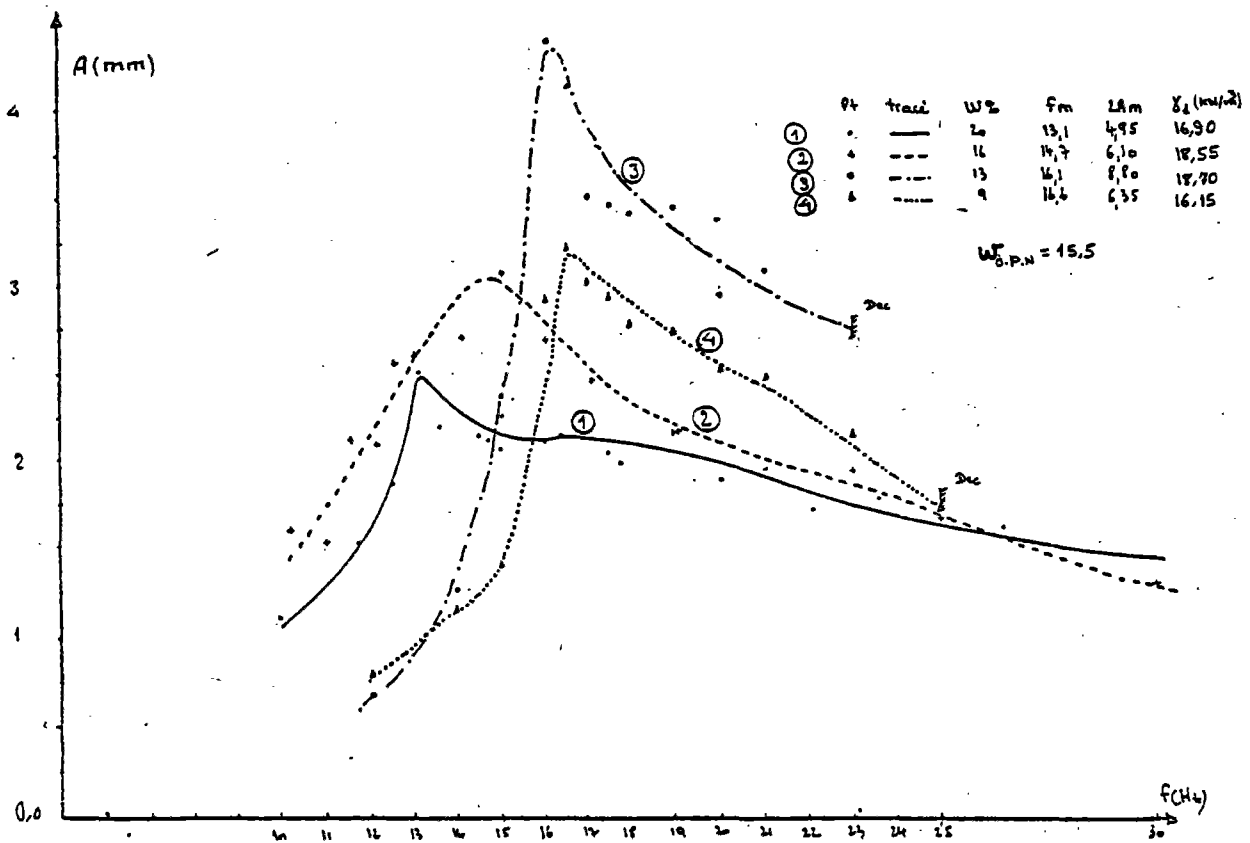


Fig. 2.38 - Courbes de résonance en amplitude absolue en fonction de la teneur en eau sur un limon naturel ; (d'après Quibel et al. [71]).

Pour les premier et deuxième cas, en raison des forts degrés de saturation, la résistance mécanique (G) du limon a baissé à partir d'un certain degré de compacité.

Selon ces courbes expérimentales, nous avons :

$$(f_m)_{3 \text{ ou } 4} > (f_m)_2 > (f_m)_1 ,$$

$$\text{et : } (A_m)_{3 \text{ ou } 4} > (A_m)_2 > (A_m)_1 ;$$

Ceci est conforme à la constatation théorique précédente. En revanche, le rapport entre la troisième et la quatrième planche ne peut pas être prévu par la formule 2.81

$$\text{car ici : } (f_m)_3 \leq (f_m)_4 ,$$

$$\text{alors que : } (A_m)_3 > (A_m)_4 .$$

2.6.4 - Variations de la force dynamique d'interaction, avec les caractéristiques mécaniques du sol, G et ρ

L'amplitude de la force dynamique appliquée au sol, si l'on suppose que le rouleau est une fondation rigide de longueur infini, est donnée par la solution de Quinlan (Eq. 2.28) :

$$P_0 = \frac{Q'_0}{\sqrt{(1 + b' a_0'^2 f_3)^2 + (b' a_0'^2 f_4)^2}}$$

où $Q'_0 = \frac{m_e e \omega^2}{L}$, $a'_0 = \frac{\omega d}{v_s} = \frac{\omega l}{2v_s}$

et $b' = \frac{M_0}{L \rho d^2} = \frac{4M_0}{L \rho l^2}$.

On a donc : $b' a_0'^2 = \frac{M_0 \omega^2}{L G}$ (2.82)

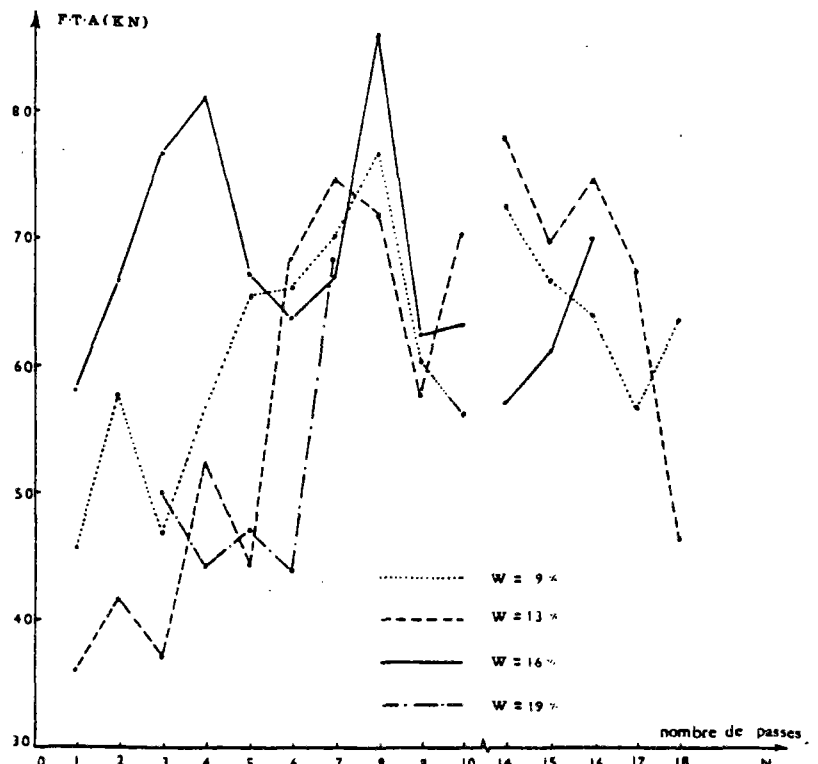
Pour un rouleau "moyen" ($M_0 g = 30$ KN, $L = 2$ m, $l = 20$ cm) vibrant à une fréquence "moyenne" ($f = 25$ Hz) sur un sol de module de cisaillement égal à 20 MPa, $\gamma = 20$ KN/m³ et $\nu = 1/3$, d'après les courbes de la Fig. 2.12 nous avons :

$$b' a_0'^2 = 18,5 \quad \Rightarrow \quad |b' a_0'^2 f_3| \gg 1 ; \quad (f_3 < 0) .$$

Par conséquent, lorsque le rouleau travaille à une fréquence constante, ($\omega = \text{cte}$), la variation de P_0 est une fonction des variations des $(-f_3/G)$ et (f_4/G) . Le problème se complique dans la mesure où $-f_3$ et f_4 varient dans le même sens que G . Vu les variations des $-f_3$ et f_4 avec a'_0 (Fig. 2.12) et compte tenu de la dépendance de a'_0 vis-à-vis de G , on peut dire seulement que la force vibrogène peut diminuer ou augmenter lorsque G et ρ augmentent.

Les enregistrements des variations de la force totale appliquée ($F.T.A. = P_0 + M_1 g$) sur le Vibrex témoignent en effet d'une évolution irrégulière de ce paramètre avec le degré de compacité atteinte - Fig. 2.39.

Fig. 2.39 - Variation de la force totale appliquée avec le nombre de passes sur un limon naturel ; (Vibrex - [101]).



En ce qui concerne la variation de l'empreinte, sa diminution avec le nombre de passes a pour effet de faire décroître la force dynamique quel que soit le sens de la variation de celle-ci.

2.6.5 - Variations de la puissance dissipée en fonction de G et $\bar{\rho}$

La puissance dissipée dans le cas d'un semi-espace purement élastique est donnée par l'Eq. 2.31 de Quinlan :

$$PD = \frac{2Q_0^2}{\sqrt{\rho G}} \frac{a'_0 f_4}{(1 + b' a'^2_0 f_3)^2 + (b' a'^2_0 f_4)^2}$$

On peut l'écrire de la façon suivante :

$$PD = \frac{2 a'_0 f_4}{\sqrt{\rho G}} \cdot P_0^2 ;$$

ou
$$PD = \frac{\omega l}{G} f_4 \cdot P_0^2 , \quad (2.83)$$

dans laquelle le facteur $(\omega l f_4)/G$ diminue considérablement lorsque le module de cisaillement augmente. Cela a pour effet de compenser les irrégularités de la variation de P_0 dans le sens d'une diminution de la résultante (PD) avec le nombre de passes.

Le rôle de la variation de l'empreinte (l) avec le nombre de passes est encore plus important dans la variation de la puissance dissipée : supposons que la diminution de 5 % de la largeur de l'empreinte entraîne -par rapport au cas où elle serait invariable- la diminution de 5 % de la force vibrogène, P_0 . Donc d'après l'Eq. 2.83, la puissance dissipée diminuerait de 15 %.

2.6.6 - Le rôle de la distribution des contraintes d'interaction

Comme il est démontré par l'étude théorique de Sung (§2.4.4) , la réponse, dans l'espace de fréquences, du système vibreur semi-espace élastique varie en fonction de la répartition des contraintes sur l'aire de contact : plus les contraintes sont concentrées au milieu de la surface de contact, plus l'amplitude maximale de déplacement est grande et la fréquence de résonance (f_m) est faible. Cela est comparable en effet à une augmentation du facteur de masses, b .

Les résultats des expérimentations (§ 2.4.4 et Fig. 2.13) montrent par ailleurs que cette distribution varie en fonction de l'amplitude de la force dynamique : dans une expérimentation sur un vibreur à base rigide circulaire, Lorenz (1953), [56] a constaté que la courbe de réponse du système sol-vibreur varie avec le moment d'excentricité, m_e , lorsque la fréquence de vibration reste constante ; Fig. 2.40. Il en déduit que lorsque la force centrifuge augmente, la distribution de contraintes sous la base rigide tend vers une distribution parabolique (dans le plan de symétrie).

Il en est fort probablement ainsi dans le cas des rouleaux vibrants où, toutes choses étant par ailleurs égales, la fréquence de résonance et l'amplitude maximale correspondante varient en fonction de m_e ; Fig. 2.41

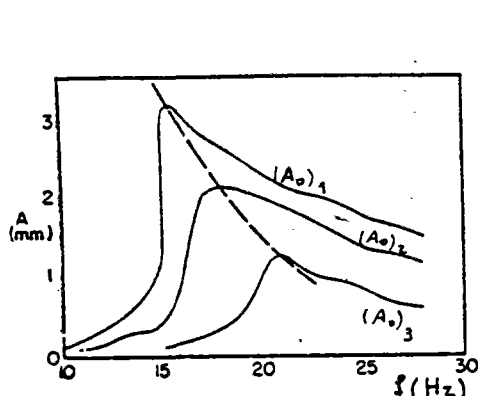


Fig. 2.40 - Courbes de réponse en amplitude pour différentes valeurs de $\frac{m_e}{L} = A_0$ (d'après Lorenz [56]).
 $(A_0)_1 > (A_0)_2 > (A_0)_3$

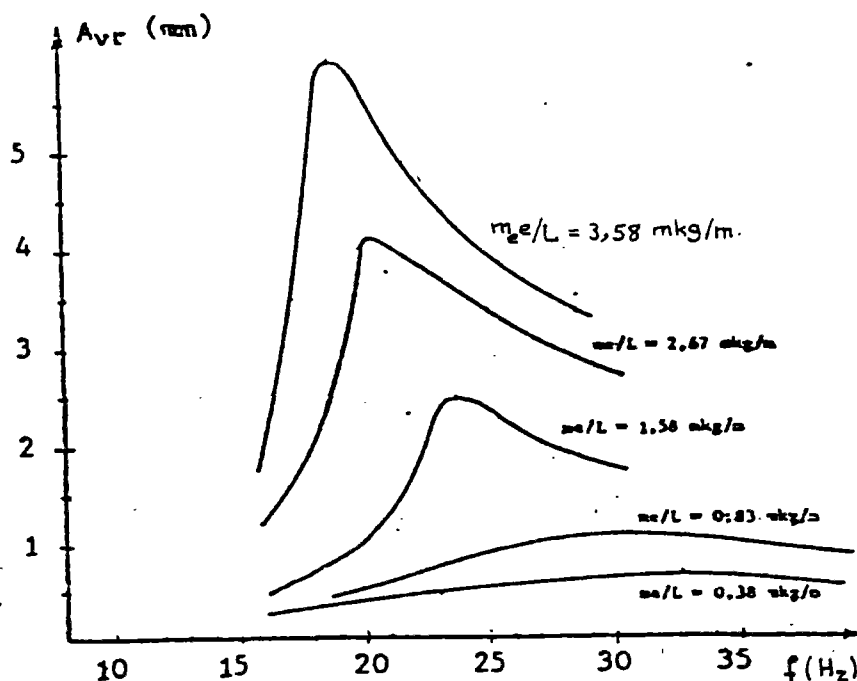


Fig. 2.41 - Courbes de réponse en amplitude des différents " m_e " testés (Vibrex) - [71]).

2.6.7 - Le désaccouplage

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que la bille ne décolle jamais du sol sous-jacent et que, à chaque passe, la largeur de l'empreinte reste constante. Or, la force centrifuge des rouleaux étant élevée, le phénomène de désaccouplage n'est pas rare aux chantiers de compactage par vibration : la force d'interaction, c'est-à-dire la force totale appliquée au sol (F.T.A.) n'est plus harmonique mais seulement périodique et même, dans certains cas, non périodique ; (Machet et Sanejouand, (1980) - [61]).

Pour résoudre ce problème, on peut penser à une approche fondée sur la décomposition de la force d'interaction -pour laquelle on attribue une forme supposée ou enregistrée- en une série de forces sinusoïdales (série de Fourier). Mais la variation et surtout l'annulation périodique de l'empreinte compliquent considérablement le problème dans la mesure où les théories du massif semi-infini ainsi que l'analogie de Lysmer ne sont valables que pour une surface de contact constante.

Il est donc indispensable d'attribuer à chaque composante de la force d'interaction une largeur d'empreinte proportionnelle à l'amplitude de cette force. Vu l'Eq. 2.54 de Lysmer, ceci correspond à l'attribution au sol d'une série de modèles du type ressort-amortisseur.

2.7 - CONCLUSIONS

Les bases théoriques de l'assimilation du comportement de l'ensemble sol-vibrateur à l'aide des modèles à paramètres concentrés ont été présentées : comme il est démontré par Lysmer, le comportement vibratoire du semi-espace élastique est analogue à celui d'un solide de Kelvin-Voigt à un degré de liberté dont la masse est nulle; la rigidité du modèle sera égale à la rigidité du semi-espace pour la surface de contact entre le vibrateur et le massif ; l'amortissement du modèle représentera l'amortissement "géométrique" du système qui est une fonction de la géométrie de l'interface, de la masse du vibrateur et de la masse volumique du semi-espace. Cet amortissement résulte en effet du rayonnement de l'énergie élastique depuis la source vers l'infini dans le massif semi-infini.

Il est rappelé par ailleurs que la présence d'un substratum rigide a pour effet principal d'augmenter le facteur d'amplification dynamique du système vibrant. La rigidité relative de la fosse d'essais devrait donc être considérée comme un facteur amplificateur.

L'examen d'une part du rôle de l'amortissement interne des sols et, d'autre part, des particularités du comportement des rouleaux vibrants met en évidence que, contrairement aux autres systèmes tels que les fondations des machines vibrantes, l'amortissement "interne" du système sol-rouleau (fonction de l'amortissement interne du matériau) n'est plus négligeable vis-à-vis de son amortissement géométrique.

L'analyse du rôle des caractéristiques mécaniques du massif de sol dans le comportement vibratoire de l'ensemble sol-rouleau nous a permis d'interpréter certaines constatations issues des essais sur le Vibrex. Elle montre notamment que :

- Au cours d'un compactage à fréquence constante, avec le nombre de passes, l'amplitude de vibration de la bille peut selon les cas :
 - . augmenter régulièrement ;
 - . diminuer régulièrement ;
 - . augmenter en valeur moyenne, tout en présentant des variations irrégulières ; par contre dans le cas où, le sol (cohérant avec un degré de saturation élevé) perd sa résistance avec le nombre de passes, c'est l'inverse qui devrait se produire
- La répartition des pressions à l'interface étant variable en fonction de l'amplitude de la force dynamique appliquée, la fréquence de "résonance" du système diminue avec l'augmentation du moment d'excentricité m.e.
- La caractéristique la plus importante des rouleaux vibrants par rapport aux autres systèmes comparables tels que les plaques vibrantes, est la variabilité de leur surface de contact avec le sol. En effet, la réponse en fréquence du couple sol-rouleau vibrant varie notablement avec la variation de la largeur de l'empreinte ; ainsi, au fur et à mesure que le matériau se compacte, la largeur "moyenne" de l'empreinte diminue, ce qui, par rapport au cas où celle-ci serait invariable, a pour effet de :
 - . diminuer l'amortissement global du système ;
 - . diminuer la force dynamique appliquée ;
 - . diminuer beaucoup la puissance dissipée ;
 - . augmenter les contraintes moyennes (statiques) appliquées au sol ;
 - . augmenter ou diminuer, selon le cas, l'amplitude des contraintes dynamiques appliquées.

CHAPITRE 3

ETUDES EXPERIMENTALES ET THEORIQUES SUR LA VARIATION DE L'AIRE DE CONTACT ENTRE LE ROULEAU ET LE SOL SOUS-JACENT

3.1 - INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent (§ 2. 6) nous avons étudié l'influence des variations de l'aire de contact bille-sol sur le comportement vibratoire des rouleaux en faisant l'hypothèse qu'au cours de chaque cycle de la vibration "en couplage", la largeur de l'empreinte oscille très légèrement autour d'une valeur qui est à peu près celle de la bille lorsqu'elle ne vibre pas, toutes choses étant par ailleurs égales. Mais, d'une part, on ne connaît pas la valeur réelle de l'empreinte de la bille roulante et, d'autre part, en raison de l'extrême complexité du problème considéré (contact parabolique, charges dynamiques, comportement non linéaire du sol à proximité de la zone de contact), il nous est impossible de justifier rigoureusement la validité de l'hypothèse ci-dessus.

Le moyen le plus direct pour connaître ces inconnues est en définitive la mesure en continu de la largeur d'empreinte dans un essai en vraie grandeur. Or, malgré l'existence d'importants moyens de mesure en continu au C.E.R., la réalisation de cet essai délicat s'avère quasiment impossible en l'état actuel des choses.

Par conséquent, nous nous sommes proposés d'entreprendre, en première approche, un programme d'essais en vraie grandeur au C.E.R. tout en se limitant aux moyens disponibles : il s'agit de mesurer les variations de la largeur d'empreinte de la bille en fonction d'une part du poids total transmis au sol et, d'autre part, des caractéristiques mécaniques du sol, le déplacement imposé à la bille étant uniquement une translation verticale.

L'objectif de cette expérimentation est une meilleure connaissance de la valeur réelle de l'aire de contact et de ses variations, étant donné qu'il est prévisible qu'en raison de la forte concentration "initiale" des contraintes dans la zone de contact, le sol subit d'importantes déformations irréversibles au voisinage immédiat de cette zone, ce qui aurait pour effet de redistribuer les contraintes en augmentant l'aire de contact. Ainsi, bien que, selon le principe de Saint-Venant, la réponse du sol à des points loins de l'empreinte ne changerait guère (pour une charge donnée), l'aire d'empreinte, elle, varierait notablement avec la "plastification locale" du sol sous-jacent.

3.2 - L'EFFET DE ROULEMENT

Dans cette expérimentation, nous mesurons la largeur d'empreinte de la bille stationnaire, c'est-à-dire de la bille qui ne roule pas et dont la charge extérieure est une force verticale centrée. La grandeur mesurée sera donc quelque peu différente de celle de la bille roulante pour les raisons principales suivantes :

a) l'influence des contraintes tangentielles d'interaction

Lorsque la bille roule, il se développe, à la zone de contact, des contraintes tangentielles dont l'intensité et la direction varient suivant qu'elle est tractée ou motrice et que le roulement s'accélère ou se freine. Dans le cadre d'une étude générale sur la traficabilité des véhicules en dehors des routes, Karafiatti et Nowatzki (1978) [103] étudient la distribution des contraintes dans l'empreinte d'une roue rigide roulante. La mesure des contraintes d'interaction se fait à l'aide de jauges de contraintes fixées sur la roue métallique. Les résultats expérimentaux concorde bien avec ceux de la théorie fondée sur le comportement rigide-plastique (critère de Mohr-Coulomb) du sol sollicité, le calcul à la rupture étant effectué par la méthode des différences finies.

Quoique la variation de l'aire d'empreinte ne soit pas mesurée, les résultats théoriques de cette étude (§3.2.3) démontrent que l'introduction de la force de traction ou du moment moteur a pour effet d'accroître la largeur d'empreinte de la roue roulante et cela d'autant plus que l'angle de frottement entre les deux corps est élevé.

En effet, les contraintes tangentielles d'interaction ont pour rôle principal d'accroître le déviateur des contraintes de façon significative sur une faible profondeur et d'entraîner ainsi la plastification (écoulement plastique) d'une zone superficielle limitée, surtout quand il s'agit des sols non cohésifs. Ce phénomène pourrait donc changer la largeur d'empreinte d'une bille motrice par rapport à son empreinte à l'état stationnaire, pour des matériaux granulaires.

b) l'influence des phénomènes dépendant du temps (fluage, ...)

Un autre phénomène qui pourrait influencer les résultats de nos essais : est le tassement différé du sol sollicité, car en réalité, à chaque instant, le tassement sous une charge constante sera la somme du tassement initial ou instantané (réversible ou irréversible) et du tassement différé (réversible ou irréversible). Or, comme l'indiquent les schémas de la Fig. 3.1, il existe une différence considérable entre l'histoire de chargement relative à la bille roulante (à une vitesse ordinaire : soit $V = 1\text{m/s}$) et celle correspondant à la mesure de la largeur d'empreinte ; alors que la durée de contact, c'est-à-dire le temps nécessaire pour que la bille parcourt une distance égale à son empreinte (soit $l' = 20\text{ cm}$) est environ 0,2 seconde, le processus des essais réalisés est tel qu'il s'écoule environ 20 secondes entre le commencement du chargement et l'enregistrement de l'empreinte (§ 3. 3). Par conséquent la largeur d'empreinte mesurée serait plus grande que celle de la bille roulante, toutes choses égales par ailleurs.

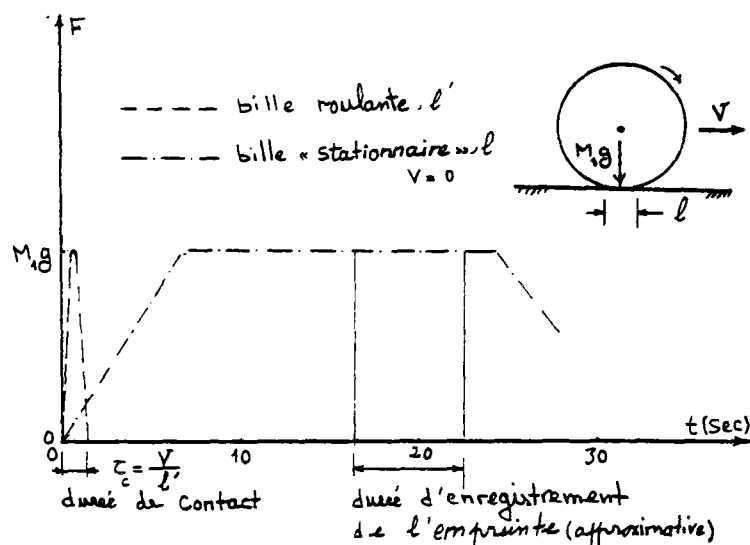


Fig. 3.1 - Schémas des variations dans le temps des charges appliquées au sol.

Faute de moyen de vérification expérimentale directe, la question est d'évaluer ou d'estimer indirectement l'écart entre les deux valeurs ci-dessus. Le problème s'avère assez délicat dans la mesure où l'on dispose de très peu d'éléments expérimentaux sur le "fluage" (dans le sens général du terme, relatif aux déformations, réversibles et irréversibles, différées) des sols. Il existe toutefois des références théoriques intéressantes concernant notre problème particulier : à savoir les études analytiques de S.G. Hunter (1961) [102] et de L.W. Morland (1962) [105] sur l'interaction entre un cylindre rigide roulant et le semi-espace viscoélastique sous-jacent. Séparément et par des méthodes analytiques différentes, ces auteurs ont résolu le problème, en déformations planes, pour une vitesse de translation (V) uniforme, le comportement de matériaux du semi-espace étant celui du modèle linéaire standard (modèle de Zener) généralisé ; les forces d'inertie ainsi que les contraintes tangentielles d'interaction sont supposées négligeables. Par ailleurs il est supposé que la vitesse est suffisamment inférieure à la vitesse de propagation des ondes de contraintes dans le massif.

Considérons les résultats de la solution numérique présentée par Hunter dans le cas du semi-espace dont la fonction de relaxation est la suivante :

$$\gamma(t) = \mu_D^{-1} (1 + f (1 - e^{-t/\tau})) \quad (3.1)$$

où μ_D est le module de cisaillement dynamique ;

τ est le temps de relaxation ;

f est le rapport entre le cisaillement différé et instantané ($f = 1$ et 9).

a_0 et a étant respectivement la demi-largeur d'empreinte en état de repos ($V = 0$) et celle de la vitesse V (Fig. 3.2), la variation du rapport a/a_0 et de l'"excentricité" de l'empreinte (b/a_0) en fonction du rapport ($V\tau/a_0$) sont indiquées par la Fig. 3.3. Par ailleurs, la distribution des pressions sur la largeur d'empreinte pour trois valeurs du $V\tau/a_0$ est présentée sur la Fig. 3.4. On notera que la distribution numéro 1 est celle de la bille au repos donnée par la théorie des contacts élastiques de Hertz.

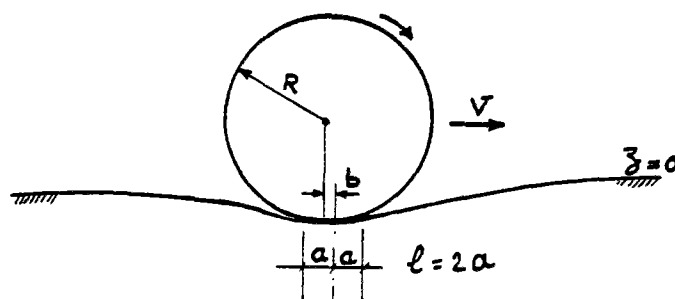


Fig. 3.2 - Bille (cylindre) roulant sur le semi-espace viscoélastique.

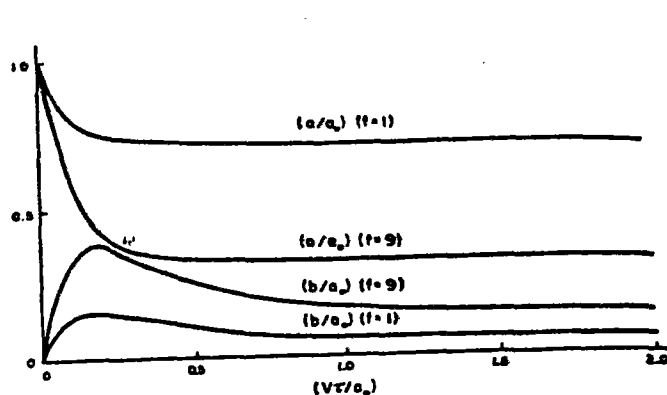


Fig. 3.3 - Variation de la largeur d'empreinte ($l=2a$) et de l'"excentricité", b , avec la vitesse de roulement ; (d'après Hunter [102]).

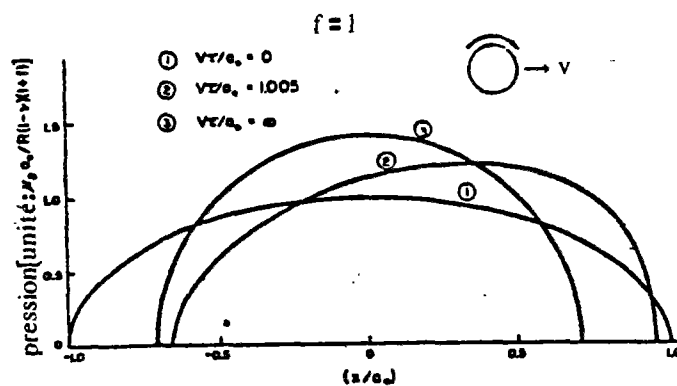


Fig. 3.4 - Distribution des pressions dans l'empreinte ; (d'après Hunter [102]).

L'examen des courbes de la Fig. 3.3 démontre que pour un cas donné la largeur d'empreinte diminue très rapidement avec la vitesse et ceci jusqu'à une certaine vitesse "limite" au delà de laquelle elle ne diminue guère ; la valeur minimale de l ainsi que la vitesse "limite" dépendent toutes les deux de f .

Même si l'on accepte le modèle ci-dessus pour les sols soumis à l'expérimentation, pour qu'on puisse tirer des conclusions utiles de la solution précédente, il est indispensable de connaître au moins l'ordre de grandeur des paramètres τ et f .

Dans son étude sur le comportement dynamique des massifs des sols, dont la partie expérimentale utilise le vibreur lourd du L.C.P.C. ($f = 10$ à 100 Hz), J. VAKILI démontre que le comportement du limon d'Orly (compacté) peut être représenté par celui du modèle de Zener (Fig. 3.2) dont le module de relaxation à la traction simple est le suivant : (E en bars) (Vakili (1969) [89]).

$$E(t) = 2762 + 920 \exp(-658t) \quad (3.2)$$

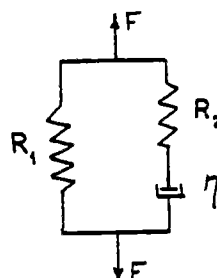
Si l'on suppose que le coefficient de Poisson est indépendant du temps, on a $\tau = 1,52 \cdot 10^{-3}$ et $f = 0,331$. Prenant des valeurs plus "pessimistes" pour la vitesse de roulement et la largeur d'empreinte ($V = 3\text{m/s}$ et $l = 0,05$ nous aurons : $\frac{V\tau}{a_0} = 0,182$.

Par ailleurs, pour la vitesse moyenne de chargement dans les conditions d'essais : $\frac{V\tau}{a_0} \approx 0$.

D'après les courbes de la Fig. 3.3, pour $f = 0,33$ l'écart maximum entre deux valeurs de la largeur d'empreinte sera inférieur à 10 %.

On notera que le modèle de Zener ne tient pas compte des déformations irréversibles.

Fig. 3.5 - Solide viscoélastique standard (modèle de Zener).



En résumé, alors que la largeur d'empreinte de la bille augmente sous l'action des efforts horizontaux de roulement, les phénomènes dépendants du temps ("fluage") la diminuent en revanche par rapport à sa valeur en état stationnaire. Compte tenu de la faible valeur des écarts impliqués par chacun de ces facteurs, il est donc admissible de négliger, en première approximation, l'influence de roulement sur la variation de l'aire de contact bille-sol.

3.3 - Essais en vraie grandeur sur la variation de la largeur d'empreinte de la balle en fonction de la charge statique appliquée.

3.3.1 - Caractéristiques des planches expérimentales réalisées.

On a réalisé quatre planches d'essai, trois bicouches et une tricouche, dont le sol support (la base de la fosse) que l'on assimile au massif semi-infini est une grave propre de module d'élasticité (mesuré à l'aide de l'essai de plaque) d'environ 20 MPa. Les couches mises en place sont compactées par le même rouleau qui sert pour l'exécution de la mesure d'empreinte. Le tableau 3.1 indique les caractéristiques principales des planches et la Fig. 3.6 schématise la position des planches dans la fosse et celle du rouleau sur les planches ainsi que les dimensions horizontales approximatives des couches compactées.

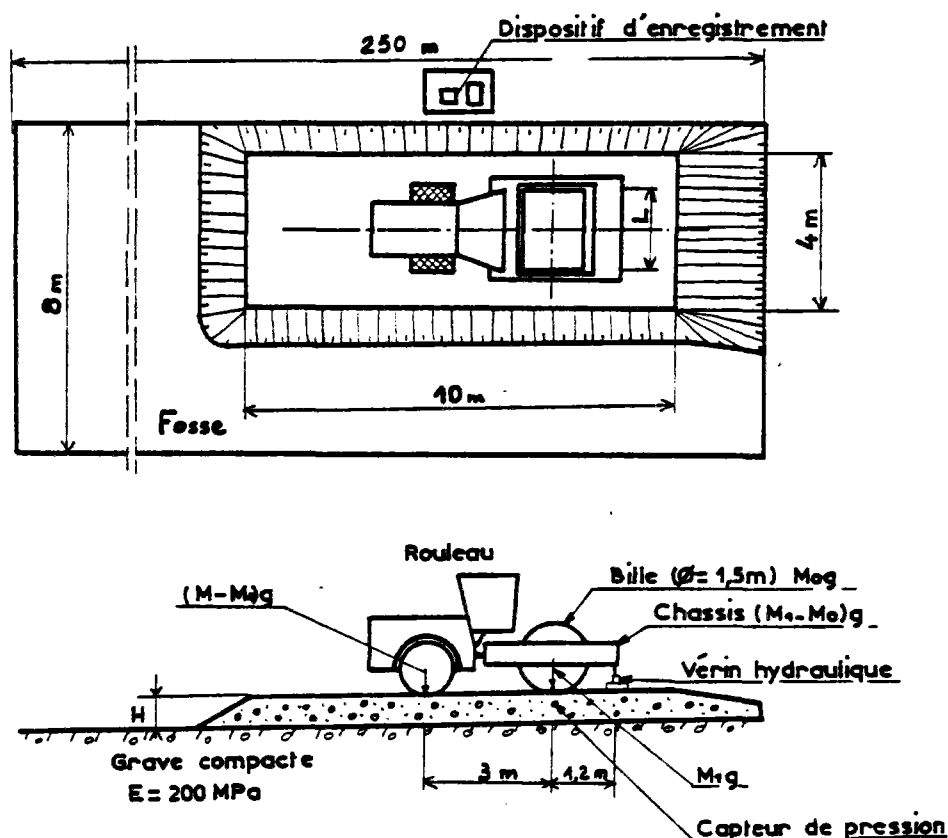


Fig. 3.6 - Vue en plan et coupe verticale des planches expérimentales.

Numéro de la planche	Nombre des couches mises en place	Matériau	Epaisseur (cm)	Module dynaplaque (kPa)	Teneur en eau	Densité sèche moyenne (kN/m ³)	Matériel	Diamètre de la bille (cm)
1	1	Grave D1	90	80 000	4,5	21,77	BW215D	150
2	1	Limon nat.	65	10 000	17,3	(?)	BW215D	150
3	1	Limon nat.	65	20 000	13	18,67	A625	150
4	2	Grave D1	25	30 000	4,1	20,87	A625	150
		Limon nat.	65		13	18,67		

Tableau 3.1 - Caractéristiques des planches d'essai.

3.3.2 - Caractéristiques des rouleaux utilisés.

Pour les planches N° 1 et 2 on a utilisé un rouleau vibrant automobile monobille, BW 215D, qui a été remplacé, faute de disponibilité, par un autre rouleau de même type, A 625, pour les planches N° 3 et 4. Les caractéristiques de ces rouleaux sont indiquées par le tableau 3.2.

Désignation	Fabricant	Longueur de la bille L (cm)	Diamètre de la bille ϕ (cm)	Poids sur bille $M_1 g$ (daN)	Poids sur unité de longueur de la bille $M_1 g/L$ (daN/cm)	Poids de la bille - $M_0 g$ (daN)	Poids total du rouleau $M g$ (daN)	Fréquence d'utilisation (Hz)	me (kg cm)
BW 215D	BOMAG	210	150	93 600	44,57	4 316	17 230	27,5	8,06
A 625	RICHER	220	150	77 000	35,00	3 443	10 500	25	5,7

Tableau 3.2 - Caractéristiques des rouleaux utilisés.

3.3.3 - Caractéristiques des matériaux utilisés.

Parmi les matériaux couramment utilisés au C.E.R., on a retenu un matériau granulaire frottant et un matériau cohérent : ^{de Rouen}

- Grave D1 : grave 0/20 propre, partiellement concassée (indice de concassage 60 %) et bien graduée ;
- Limon Tourville : limon peu plastique - IP = 8 % avec WL = 30.

Les courbes granulométriques de ces matériaux figurent en annexe N° 1. Le tableau 3.3 donne les résultats d'essais Proctor.

		Grave D1	Limon
Classification L.P.C.		Gb	Lp
Granulométrie		0/20	95 % < 80 μ
O.P.N.	γ_d	-	17,80 (kN/m ³)
	w %	-	15,5
O.P.M.	γ_d	21,25	19,15
	w %	5,5	12,0

Tableau 3.3 - Résultats d'essais Proctor.

Par ailleurs, on dispose des résultats d'essais en laboratoire relatifs aux propriétés mécaniques sur les éprouvettes compactées de ces matériaux. En ce qui concerne la grave D1, ses caractéristiques intrinsèques (C , ϕ') et constantes élastiques (ν , E) correspondant à l'état de compacité optimum (Proctor modifié) ont été mesurées au moyen des essais triaxiaux à fortes pressions latérales ($\sigma'_3 = 400, 500, 600$ et 700 kPa). Selon ces essais dont les courbes sont données en annexe N° 1, $C' = 0$, $\phi' = 45^\circ$ et les valeurs du coefficient de Poisson et du module d'Young varient, suivant la pression latérale, entre les limites ci-dessous :

$$0,32 < \nu < 0,41$$

$$86,5 < E < 119 \text{ (MPa)}.$$

Pour la même compacité, la valeur C.B.R. (sans surcharge) est 140.

Quant au limon, des essais triaxiaux consolidés non drainés sur les éprouvettes compactées (Proctor normal) donnent les résultats suivants (annexe N° 1):

$$\begin{array}{ll} c_{cu} = 10 \text{ kPa} & c'_{cu} = 0 \\ \phi_{cu} = 16,5^\circ & \phi'_{cu} = 31,5^\circ \end{array}$$

Les teneurs en eau initiales des éprouvettes sont supérieures à $w_{0,p.N.} = 15,5 \%$.

Notons que les essais triaxiaux ci-dessus ont été effectués antérieurement et sur des éprouvettes dont la compacité et le degré de saturation sont en général différents de ceux des planches que nous avons réalisées.

3.3.4 - Paramètres mesurés

Pour chaque planche, on mesure, à différentes charges, P' , appliquées au sol par unité de génératrice de la bille, les valeurs correspondantes des paramètres ci-dessous (Fig. 3.7) :

- largeur moyenne d'empreinte, l ;
- poinçonnement de la bille, w_0 ;
- pression verticale induite au sol sous l'axe de la bille (à 3 ou 4 profondeurs différentes), σ_z .

Par ailleurs, chaque planche s'identifie par la mesure des paramètres suivants :

- la teneur en eau moyenne de la couche compactée, \bar{w} ;
- le poids spécifique sec moyen, $\bar{\gamma}_d$;
- l'épaisseur compactée, h ;
- le module de déformabilité de la structure (essai Dynaplaque).

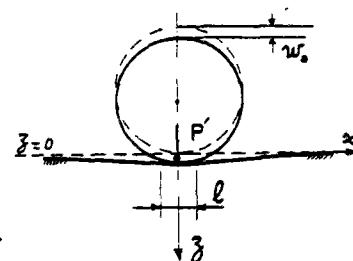


Fig. 3.7 -

3.3.5 - Moyens de mesures

- Mesure de la largeur moyenne d'empreinte : on la mesure à l'aide du papier à tirage sensible à l'ammoniaque (papier pour développement à sec Contralux - largeur = 0,75 m et longueur = 40 m) que l'on place, avant le chargement, sous la bille (sur toute la longueur de la bille) et on pulvérise sous pression, par un pistolet, l'ammoniaque sur sa partie exposée, une fois que la bille s'appuie sur le sol, le papier étant entre les deux corps (Fig. 3.8).

- Mesure du poinçonnement de la bille : le poinçonnement de la bille et l'épaisseur moyenne des couches compactées sont mesurés à l'aide d'un niveau (Wild, B3) dont la précision est de l'ordre de 0,1 mm. Les déformations de la bille elle-même sont évidemment négligeables.

- Mesure de la pression dans le sol : pour cette mesure, on dispose de quatre capteurs de pression de type résistif. Ce capteur est en effet un montage des quatre jauges de déformation en pont de Wheatstone, collées sur la face intérieure de la base d'un cylindre de révolution métallique de diamètre de 12 cm et de hauteur d'environ 4 cm ; (Annexe n° 1).

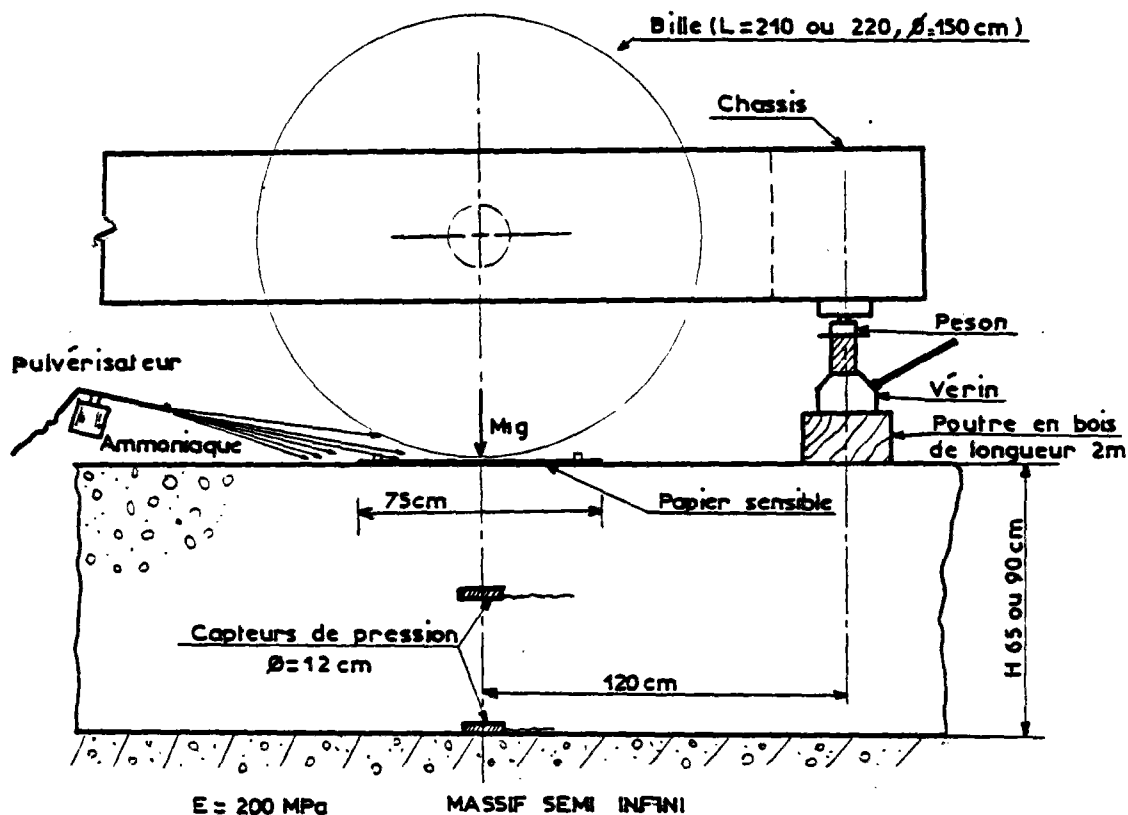


Fig. 3.8 - Détails des dispositions de mesures.

Les capteurs sont reliés, par l'intermédiaire d'un pont d'équilibrage (SEDEME) à un enregistreur "papier" (GOULD BRUSH à quatre voies - sensibilité de 1 à 5 000 mV ; vitesse de roulement du papier de 1 à 125 mm/sec.). Ils présentent une sensibilité de l'ordre de 3,7 mV/kPa.

Notons que les valeurs mesurées par le capteur de pression doivent être considérées avec prudence, car il mesure, en un emplacement prévu à l'avance, la contrainte qui aurait eu lieu à cet endroit en son absence. Or, la différence entre le module élastique du capteur et celui du sol crée une importante distorsion du champ des isostatiques et introduit par conséquent des erreurs de mesure difficiles à évaluer. Par ailleurs, ces capteurs, placés à faibles profondeurs, sont susceptibles de subir des translations et rotations non négligeables sous l'action du compactage par vibration.

- Mesure de la densité sèche moyenne : elle a été réalisée au moyen d'un gammadensimètre à pointe, DR 30, qui donne la densité moyenne de la couche sur une profondeur de 30 cm ($z = 0$ à $z = 30$ cm). La valeur retenue est la moyenne des valeurs mesurées en trois emplacements différents dans la partie prévue pour la mesure de l'empreinte.

- Mesure de la charge totale appliquée au sol par le cylindre : comme on le voit sur la Fig. 3.8 les déplacements verticaux de la bille s'effectuent au moyen d'un vérin hydraulique et par l'intermédiaire des déplacements de son châssis. Cela étant, la charge appliquée au sol par la bille est calculée à partir de celle supportée par le vérin, cette dernière étant mesurée au moyen d'un capteur de force placé entre le vérin et le châssis. Il s'agit d'un peson (SEDEME, CC 20) équipé d'un pont de quatre jauges d'extensiométrie alimenté d'un courant continu de 10 V. Il fonctionne seulement en compression et ceci jusqu'à 200 kN ; sa sensibilité est de 10^{-4} mV/daN.

Les signaux émis par ce capteur sont également enregistrés par l'enregistreur "papier".

- Mesure du module de déformabilités des couches : les couches compactées ont été auscultées à l'aide de la dynaplaque du C.E.T.E. de Rouen ($\phi = 600$ mm). Il s'agit d'un appareil de mesure de la déformabilité ou, plus précisément, de la réaction dynamique des plates-formes de terrassement (dont le module de déformabilité statique E_{V_2} déterminé à l'essai de plaque, $\phi = 600$ mm, suivant le mode opératoire du L.C.P.C., est inférieur à 120MPa

On dispose par ailleurs de résultats des expérimentations réalisées au C.E.R. (1978), dont le but a été d'établir une corrélation entre le module "dynaplaque" E_d et celui à la plaque statique, E_{V_2} . Sur cinq plates-formes différentes 46 mesures ont été faites avec chaque appareil (annexe 1). D'après ces résultats il existerait une relation du 2^e degré entre les deux modules. Une relation linéaire a été proposée ($E_d = 0,70 E_{V_2} + 18,6$ en MPa) qui ne nous semble pas être significative pour les valeurs de E_d inférieures à 50 MPa.

Vu l'importante dispersion des points mesurés (dans le système E_d ; E_{V_2}), il nous paraît admissible, dans une première approximation, de considérer $E_d = E_{V_2}$.

Notons que le module de chaque planche a été mesuré à plusieurs endroits dans la zone prévue pour l'emplacement de la bille ; le module retenu est la moyenne de différents modules relatifs au deuxième ou troisième chargement de la plaque.

3.3.6 - Déroulement des essais

Les essais de chaque planche se sont déroulés suivant les étapes ci-dessous :

- 1 - Mise en place du matériau au moyen d'un chargeur.
- 2 - Mise en place des capteurs de pression à la suite d'un précompactage du matériau foisonné (2 passes statiques).
- 3 - Compactage (environ 10 passes statiques et 20 passes en vibration).
- 4 - Mesure par nivellement de l'épaisseur finale de la couche.
- 5 - Equilibrage du pont de Wheatstone.
- 6 - Essais dynaplaque.
- 7 - Mise en place de deux plaques d'acier (100 x 60 x 1 cm chacune) à l'endroit prévu pour la mesure d'empreinte.
- 8 - Mise en place du rouleau de façon que la bille s'arrête au milieu de la plate-forme métallique.
- 9 - Mise en place du vérin et du capteur de forces ; mesure du code de la bille correspondant au $P = 0$.
- 10 - Mise en place du papier sensible après avoir levé la bille et retiré les plaques.
- 11 - Déchargement progressif du vérin jusqu'à ce que la bille transmette au sol une quantité de charge fixée à l'avance.
- 12 - Mesure du poinçonnement de bille.
- 13 - Marquage, sur le papier, de l'empreinte par pulvérisation de l'ammoniaque.
- 14 - Elévation de la bille pour pouvoir retirer le papier.

On remet ensuite une autre bande de papier en dessous de la bille et on répète les étapes 11 à 14 avec une charge plus grande. Les charges pour lesquelles on mesure la largeur d'empreinte sont les suivantes :

$P = (5), 10, 20, 30, (35,5), (40)$ et (50) daN/cm/l.

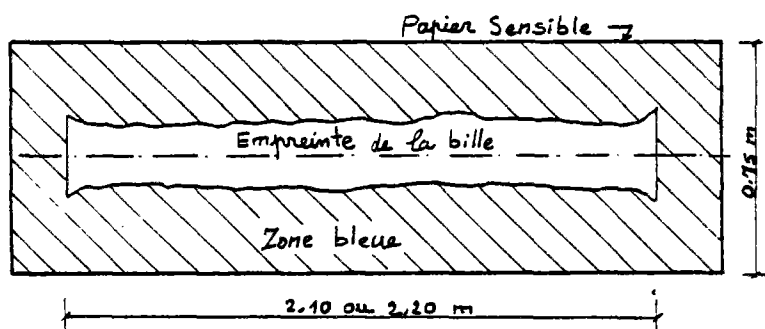
Remarques

a) Les plaques métalliques servent au départ à répartir la charge de la bille sur une surface suffisamment grande. Il s'agit d'éviter dans la mesure du possible le poinçonnement de la bille avant la mise en place du vérin et du papier, et avant qu'on puisse définir un niveau de référence pour la mesure du poinçonnement.

b) Afin de réduire au maximum les tassements immédiats et différés du vérin, qui sont nuisibles au bon déroulement des essais, on le met sur une plate-forme ayant une grande surface de contact avec le sol (traverse en bois ou pièce métallique selon le cas). Par ailleurs, la distance entre l'empreinte de la bille et celle du vérin n'étant pas très grande (120 cm de centre au centre), on a vérifié, au moyen d'un chargement direct du vérin par trois test de 250 kg chacun, le tassement sous l'axe de la bille. Il en ressort que l'interaction vérin-bille en ce qui concerne le tassement est négligeable. Ceci peut s'expliquer par la faible portance des matériaux choisis qui subissent des poinçonnements localisés et irréversibles. Par contre, les charges appliquées au sol par le vérin influencent légèrement la réponse du capteur de pression qui est placé à la profondeur de 90 cm sous l'axe de la bille (pl. N° 1). L'aire de contact du vérin avec le sol étant constante, cette erreur a été corrigée suivant l'hypothèse de l'élasticité linéaire.

c) Sous l'action de l'ammoniaque, les parties exposées du papier qui sépare la bille du sol sous-jacent changent presque immédiatement la couleur. Il reste par conséquent une bande blanche correspondant à l'empreinte au milieu des zones bleues (Fig. 3.19). Pour éviter les erreurs dues à la succion de l'ammoniaque par la partie intacte, il faut marquer, une fois le papier retiré, les limites de deux zones. Ces limites n'étant pas assez nettes, la précision de l'opération est toute relative. Il est difficile par ailleurs d'évaluer les erreurs de mesure relatives à l'incertitude sur la détermination de la frontière entre les deux zones. A notre avis, les écarts de mesure de la largeur d'empreinte, relatifs à ce facteur, varieraient entre -3 et +3 cm.

Fig. 3.9 - Schéma de l'empreinte bille-sol "enregistrée" sur le papier sensible, (voir photos en Annexe N° 1).



L'empreinte ainsi enregistrée forme une bande étroite plus ou moins régulière dont les parties les plus irrégulières se trouvent en général aux deux extrémités de sa longueur (sur ~ 15 cm à chaque côté) en raison d'effets de bords.

Les irrégularités concernant la largeur de l'empreinte "enregistrée" résultent d'une part de la non-homogénéité du matériau et d'autre part des irrégularités de l'épaisseur de la planche, celles-ci diminuant sous la charge des plaques métalliques.

La valeur retenue pour la largeur d'empreinte est la moyenne arithmétique de 19 mesures : une mesure tous les 12 cm environ de la longueur de bande. A titre indicatif, nous donnons dans le tableau 3.4 les moyennes les écarts type et les valeurs extrêmes des valeurs mesurées de la largeur d'empreinte sur les planches N° 3 (Limon w = 13 %) et N° 4 ((Limon) + grave D1).

Charge statique appliquée (daN/cm/l)		10	20	30	35
Planche N° 3	lm (cm)	11,1	13,9	15,7	17,7
	σ (")	1,4	1,4	1,7	1,8
	lmin-lmax	8,7 - 13,7	11,0 - 16,0	13,2 - 18,2	15,1 - 20,6
Planche N° 4	lm (cm)	10,0	11,5	13,1	17,4
	σ (")	2,7	2,1	1,9	2,9
	lmin - lmax	6,2 - 15,3	8,4 - 14,6	10,5 - 17,0	12,3 - 21,4

Tableau 3.4 - Moyenne, écart type et fourchette des valeurs mesurées de la largeur d'empreinte.

On notera que la valeur indiquée pour la charge par unité de génératrice de la bille est une grandeur moyenne et qu'en réalité la distribution de la charge sur la section longitudinale de l'empreinte n'est pas nécessairement uniforme mais les pressions maximales se trouveraient aux deux extrémités de la bille en raison de la grande rigidité de cette dernière par rapport au matériau sous-jacent.

d) Les auscultations des planches au moyen de la dynaplaque ont donné les résultats suivants :

	coef. de Restitution (R)	→	E_d (kPa)
Planche N° 1 (grave D1)	0,61	-	80 000
" N° 2 (limon w = 17,3 %)	0,12	-	10 000
" N° 3 (" w = 13 %)	0,22	-	20 000
" N° 4 (limon+grave D1)	0,35	-	30 000

Notons que la courbe d'étalonnage de l'appareil n'est suffisamment précise que pour les valeurs du coefficient de restitution comprises entre 0,10 et 0,60. Toutefois, les résultats des essais de plaque ($\phi = 600$ mm), réalisés en 1972 au C.E.R. sur les planches de grave et de limon dont les caractéristiques sont très proches de celles des planches N° 1 et 2 ont donné des modules de déformabilité E_{V_2} presque égaux aux modules ci-dessus ($E_d = 80\ 000$ et $10\ 000$ kPa).

e) Les capteurs de pression sont placés sous l'axe longitudinal de l'empreinte (le long duquel la bille entre en contact avec le sol) et au voisinage ou sous son axe transversal.

f) Dans le cas de la planche N° 2, sous l'action du compactage, ces capteurs avaient subi d'importants déplacements et rotations rendant impossible l'interprétation des signaux enregistrés. Par ailleurs, par suite d'une défaillance de la liaison capteur-mont, la pression en fond de couche des planches 3 et 4, n'a pu être enregistrée.

g) Le dépôt de limon situé en dehors du site propre, ayant été humidifié de façon excessive par la pluie ($w = 17\%$), on a dû, pour obtenir une couche plus compacte que celle de la planche N° 2, décompacter cette dernière par le rotovator et la dessécher à l'aide d'un appareil de chauffage au fuel (Master).

h) Vu l'irrégularité de l'empreinte marquée et les erreurs de détermination de ses limites, il est pratiquement impossible de faire des essais avec des charges inférieures à 5 daN/cm/l.

3.3.7 - Les résultats des essais

1 - Pression induite.

Les Figs. 3.10, 11 et 12 illustrent la variation en profondeur de la pression verticale maximale pour différents types de chargement : bille en repos pendant une passe statique et pendant une passe en vibration. Bien que le nombre de capteurs utilisés ne soit pas assez grand, et même suffisant dans les cas des planches N°s 3 et 4, les courbes obtenues laissent apparaître que :

- sous l'action du roulement les pressions induites augmentent d'environ 30 % par rapport au cas de la bille stationnaire, que la bille soit motrice (pl. N° 1) ou non (pl. N°s 3 et 4).

- sous l'effet de la vibration, les pressions augmentent d'environ 50 à 300 pour cent par rapport à la passe statique. Par ailleurs, l'écart entre les pressions "statique" et "dynamique" augmente avec la profondeur.

- quelle que soit la profondeur, les pressions mesurées sur la planche N° 4, qui est construite en ajoutant une couche de 25 cm de grave D1 sur le limon de la planche N° 3, sont supérieures à celles de la planche N° 3.

La variation des pressions induites avec la charge appliquée (bille stationnaire), correspondant aux planches N°s 1, 3 et 4, est indiquée par les Figs. 3.13, 14 et 15. En comparant les courbes obtenues on constate que d'une manière générale, la pression, à toute profondeur, est une fonction non-linéaire de la charge appliquée -ceci est illustré à titre d'exemple pour $z = 20$ cm sur la Fig. 3.16-.

Pour une charge donnée, la pression induite à de faibles profondeurs ($z < 30$ cm) est d'autant plus grande que le module de la planche est plus élevé. Cela n'est pas le cas à partir d'une certaine profondeur car le gradient des pressions en fonction de la profondeur, qui décroît avec la profondeur, varie d'une planche à l'autre. Ces deux phénomènes pourraient être expliqués par la variabilité de l'aire de contact en fonction d'une part de la charge appliquée et, d'autre part, du module de déformabilité de la structure sollicitée.

Le nombre insuffisant des capteurs ne permet pas de conclure de façon significative sur la variation des pressions dans la planche N° 4 et sur sa discontinuité à l'interface de la grave et du limon.

2 - Déflexion au centre de l'empreinte.

La liaison entre la charge appliquée par unité de longueur p' et le poinçonnement de la bille est indiquée par la Fig. 3.17. On constate que dans le domaine des charges appliquées, la convexité de la courbe de la planche N° 1 est toujours vers le haut alors que celle de la courbe de la planche N° 3 est vers le bas.

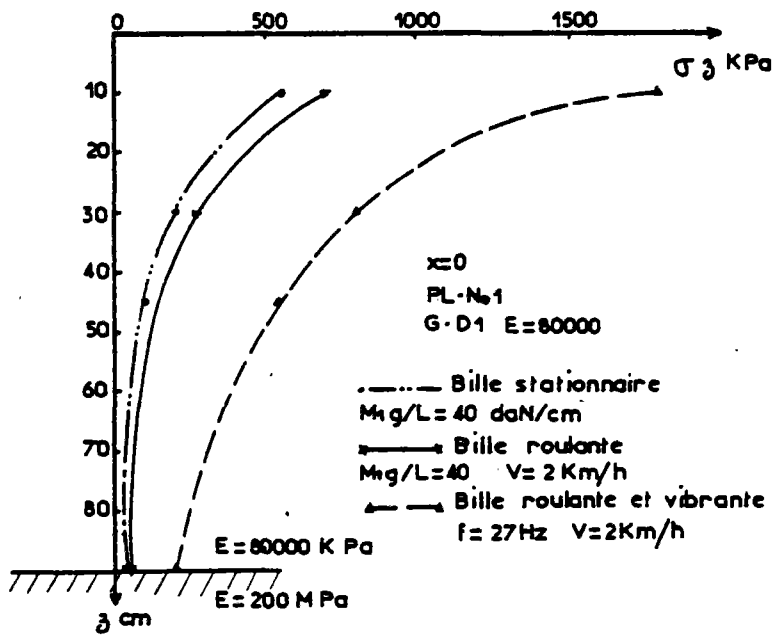


Fig.3.10- Distributions en profondeur de la pression induite correspondant aux différents types de chargement; (P1.N°1).

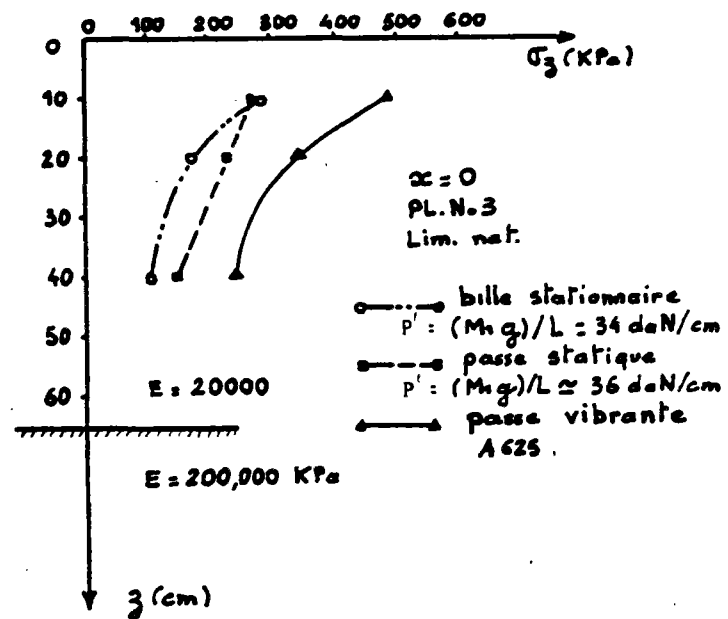


Fig.3.11- Distribution en profondeur de la pression induite correspondant aux différents types de chargement; (P1.N°3).

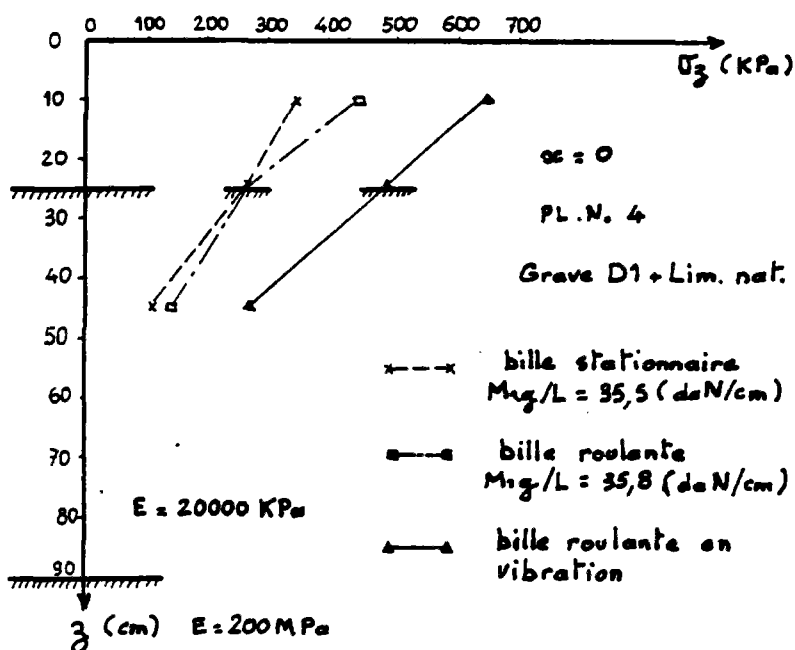


Fig.3.12- Distributions en profondeur de la pression induite correspondant aux différents types de chargement; (P1.N°4).

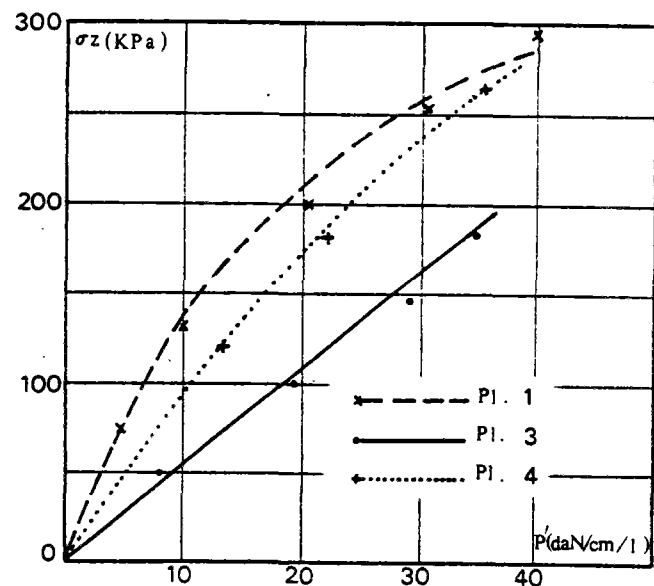


Fig.3.16- Variation de la pression induite (profondeur=20cm.) en fonction de la charge statique appliquée sur différentes planches.

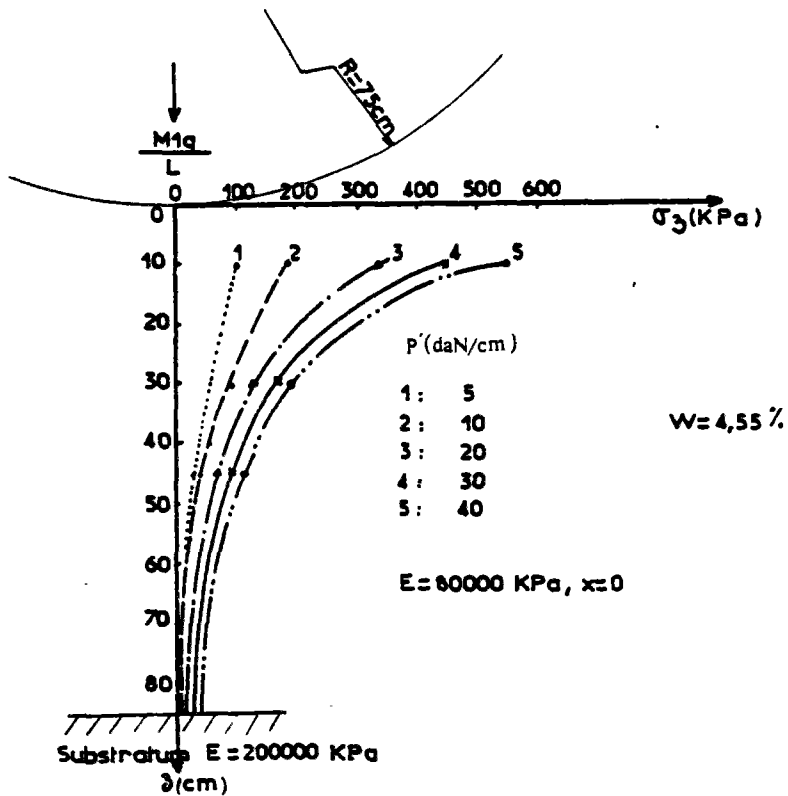


Fig. 3.13- Distribution en profondeur de la pression induite correspondant aux différentes valeurs de la charge statique appliquée; (Pl. N°1)

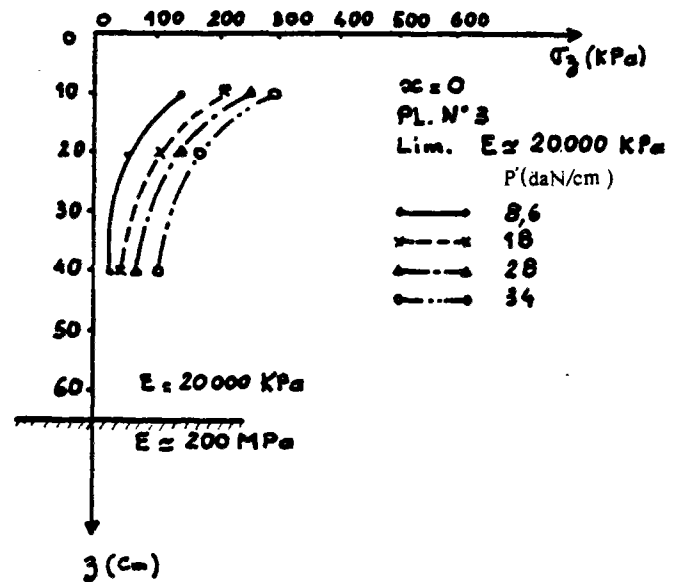


Fig. 3.14- distribution en profondeur de la pression induite correspondant aux différents valeurs de la charge statique appliquée; (Pl. N°3)

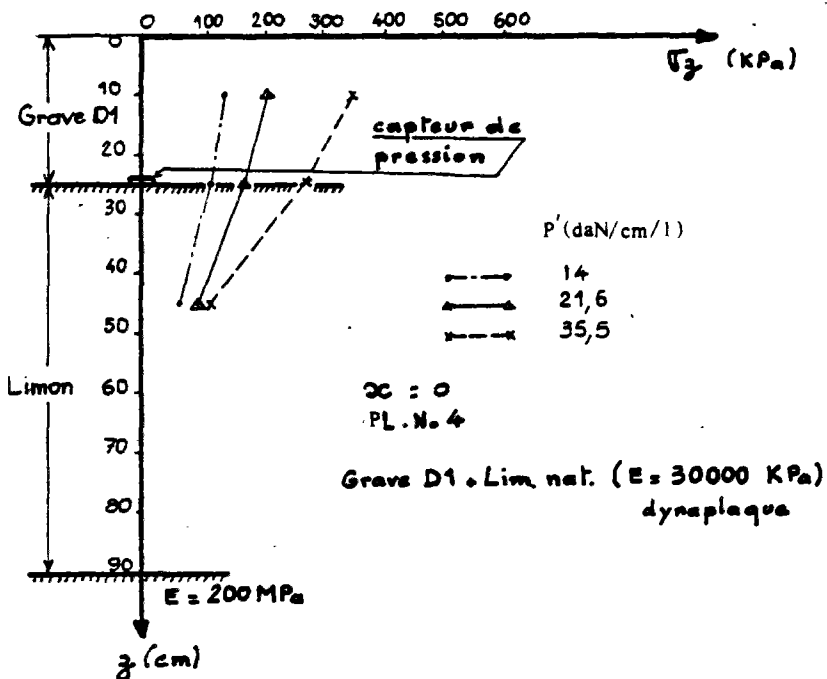


Fig. 3.15- Distribution en profondeur de la pression induite correspondant aux différentes valeurs de la charge statique appliquée (Pl. N°4).

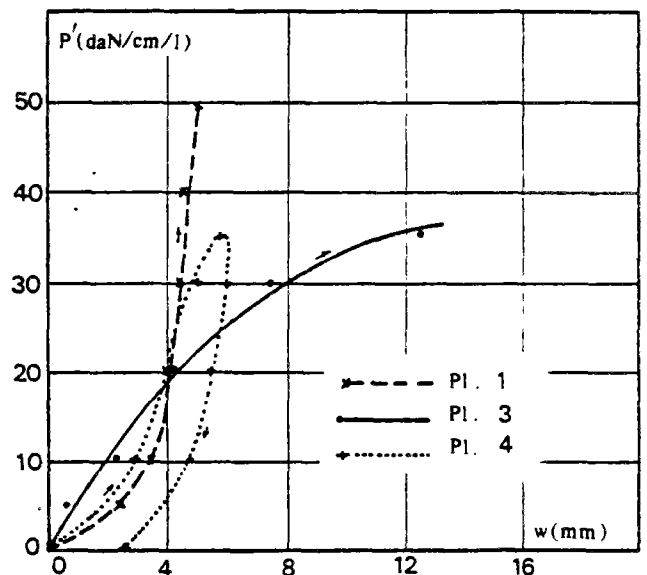


Fig. 3.17- Déflexion (au centre d'empreinte) en fonction de la charge statique appliquée.

Mais la planche N° 4 dont le module à la dynaplaque se trouve entre ceux des deux planches précédentes a une réponse intermédiaire : en début de chargement elle est similaire à celle de la planche N° 1 (grave D1) mais à partir d'une certaine valeur de charge, elle change sa convexité et prend l'allure de la réponse de la planche N° 3. Ceci signifie que la réponse en déflexion du bicouche grave-limon est dominée au départ par celle de la couche supérieure mais à partir d'un certain niveau de charge, c'est la déflexion de la couche inférieure (limon) qui devient la plus importante.

La variation de ^{1a} déflexion en déchargement, mesurée sur la planche N° 4, montre qu'il existe une certaine déformation irréversible (et/ou différée) à la fin du déchargement.

3 - Largeur d'empreinte.

Les variations de la largeur d'empreinte avec la charge appliquée sont présentées sur la Fig. 3.18. On note que les valeurs mesurées, qui sont en réalité les longueurs des arcs de contact, sont assez petites par rapport au diamètre de la bille (150 cm) et on peut donc les confondre avec leurs projections dans le plan horizontal, l'erreur maximale étant inférieure à 3 %.

En principe, les points relatifs à une planche donnée doivent se trouver sur une courbe régulière ayant l'origine des coordonnées pour point de départ. Mais comme on le voit sur la figure, dans le domaine des valeurs mesurées, la courbe la plus proche n'est qu'une portion de droite dont la direction ne passe pas par l'origine.

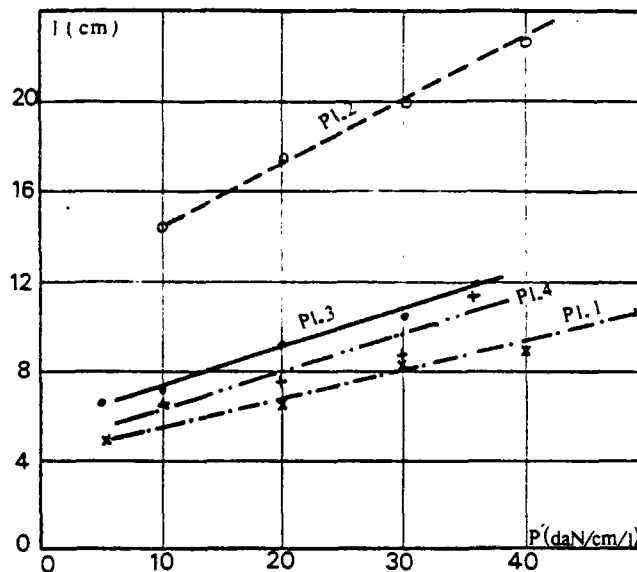


Fig. 3.18 - Largeur d'empreinte en fonction de la charge statique appliquée

L'examen de ces données expérimentales montre que d'une manière générale :

- la largeur d'empreinte croît très rapidement dans le domaine des charges dont la limite supérieure serait inférieure à 5 daN/cm/l, celle-ci étant la charge la plus petite pour laquelle la mesure a pu être effectuée.
- la pente des droites expérimentales varie légèrement avec l'inverse du module dynamique.
- quel que soit le matériau, la largeur d'empreinte correspondant à une charge donnée diminue avec l'augmentation du module E_d . Par exemple, bien que la densité moyenne de la couche supérieure (grave D1) de la planche N° 4 soit presque égale à celle des 30 cm supérieurs de la planche N° 1 (grave D1), la largeur d'empreinte sur la première est toujours supérieure à celle de la deuxième. Etant donné que la couche inférieure de la planche N° 4 est ^{constituée} d'un matériau peu résistant (limon : E_d 20 000 kPa), on peut conclure que, comme le module de dynaplaque, la largeur d'empreinte varie en fonction non seulement des caractéristiques mécaniques de la partie supérieure du matériau, mais en plus de la déformabilité globale de la structure sous-jacente.

3.4 - Solution analytique

Le problème du contact entre les corps déformables occupe une place importante aussi bien dans le domaine des mathématiques appliquées que dans celui des sciences de l'ingénieur. En génie civil, il concerne les fondations, les éléments de soutènement, les structures géologiques, etc.

Une solution complète du problème d'interaction en élasticité consiste en général à déterminer la géométrie de la surface de contact et la distribution des contraintes dans cette surface. De là l'état élastique de chaque corps sera calculé selon ses caractéristiques.

L'analyse de l'interaction entre les corps élastiques a été développée dans trois domaines distincts :

- 1 - L'interaction entre les corps élastiques : la géométrie de la surface de contact est inconnue.
- 2 - L'interaction entre un milieu élastique et un corps rigide : il s'agit des cas où la surface de contact est a priori connue et reste constante pour toute valeur de la charge appliquée.
- 3 - L'interaction entre un corps élastique et un élément structural simple : il s'agit de cas particuliers où le comportement d'un des deux corps élastiques peut être schématisé par celui d'un élément simple tel qu'une poutre ou une plaque.

Il est évident que le problème de l'interaction bille-sol (en élasticité) se situe dans le premier domaine ci-dessus, même si l'on considère la bille comme un corps rigide.

Historiquement le problème du contact entre deux corps élastiques dû à une force normale fût abordé en premier par Hertz en 1881 ; mais comme l'a souligné Solomon, la plupart de ses résultats, y compris la solution du problème du poinçon à base elliptique et la suggestion d'utiliser cette solution dans le problème du contact des corps lisses, ont été obtenus simultanément par Boussinesq.

L'idée de base consiste à assimiler les corps en contact à des demi-espaces ; ce qui permet d'examiner leur comportement au voisinage de la zone de contact, moyennant les résultats connus de l'étude du problème de Newmann pour le demi-espace élastique (solution de Boussinesq; ...). L'hypothèse de contact lisse ramène le problème à celui de la transmission des contraintes normales, inconnues, réparties sur un domaine lui aussi inconnu. Le problème de contact entre des structures semi-infinies viscoélastiques et les corps élastiques reposant sur ces structures est résolu par M. Frémond (1971) [33].

Le problème du contact tridimensionnel sans frottement (charge extérieure normale et centrée) de deux corps élastiques parfaitement lisses est expliqué d'une façon exhaustive par Solomon dans son livre : "Elasticité linéaire" [108]. L'auteur présente de nombreuses solutions, accompagnées de multiples références bibliographiques précises, relatives aux poinçons à base plane elliptique et non elliptique et aux contacts paraboloidaux de deux corps élastiques.

Pour le contact paraboloidal (la surface de contact est une ellipse), on résout le problème à l'aide d'une deuxième hypothèse (solution de Hertz) qui consiste à supposer que la distribution des contraintes normales dans la surface de contact est un demi-ellipsoïde construit sur l'ellipse de contact (a, b étant les demi-axes dans le plan xy) :

$$P(\xi, \eta) = q_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}} \quad \begin{array}{l} -a \leq \xi \leq a \\ -b \leq \eta \leq b \end{array}$$

On trouve la solution de ce problème dans la plupart des ouvrages classiques sur l'élasticité ou la résistance des matériaux (Théorie de l'élasticité de Timoshenko (1948) [109] Théorie de l'élasticité de Landau et Lifchitz (1967) [104] et Résistance des matériaux de Courbon (1971) [100]).

Le problème du contact entre deux cylindres le long d'une génératrice commune a été étudié : soit comme un problème plan et par les méthodes propres aux problèmes bidimensionnels (I. Chtaerman ; L. Galine : cités dans [108] ; et Mouskhelichvili (1953) [106] ; soit comme un cas particulier du contact paraboloidal où le rapport $\frac{a}{b}$ tend vers l'infini (A. Dinnik ; N. Béliev : cités dans [108]).

Ce problème, quelle que soit la méthode d'approche, n'est résolu qu'en déformation plane, ceci ayant pour inconvénient de rendre indéterminé le rapprochement de deux cylindres. Cet inconvénient constitue en fait la caractéristique paradoxale des solutions en déformation plane, qui présentent des difficultés pour ce qui est de la détermination des déplacements ([108] p. 605).

Bornons nous aux résultats : si l'axe des y est perpendiculaire au plan de la Fig. 3.20 et P' la charge par unité de longueur, la largeur de la surface de contact entre deux cylindres est donnée par la formule suivante :

$$l = 2 \sqrt{\frac{4 P' (k_1 + k_2) R_1 R_2}{R_1 + R_2}} ; \quad (3.3)$$

où R et R₂ sont les rayons des cylindres et :

$$k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} , \quad k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} ; \quad (3.4)$$

La distribution semi elliptique des pressions donne la pression au centre :

$$q_0 = \frac{4 P'}{\pi l} \quad (3.5)$$

Si l'on attribue à l'un des cylindres une rigidité très grande, on obtient en remplaçant l'autre par un semi-espace (Fig. 3.2) :

$$l = 4 \sqrt{\frac{1-\nu^2}{\pi} \frac{P' R}{E}} \quad (3.6)$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \frac{P' E}{R}} \quad (3.7)$$

connaissant q_0 et l on peut calculer la tension en tout point du semi-espace. Ce calcul (de Béliazev et rapporté dans [109]) montre que le point qui supporte la contrainte de cisaillement maximale est à une certaine profondeur

sur l'axe des z . La figure 3.21 représente la variation des contraintes suivant la profondeur du point considéré pour $\nu = 0,3$. Le cisaillement maximum se produit à la profondeur $z = 0,39 l$ et sa grandeur est $0,304 q_0$ où $q_0 = 0,418 \sqrt{\frac{P' E}{R}}$. Le cisaillement maximum à la surface de contact ($x = 0$) est égal à $0,2 q_0$.

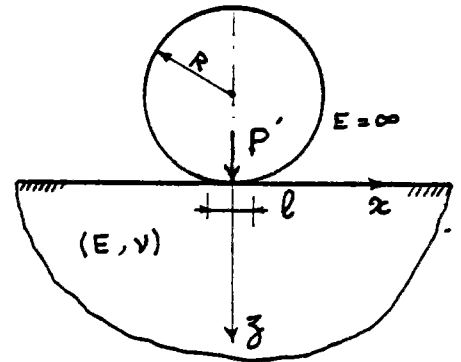


Fig. 3.19

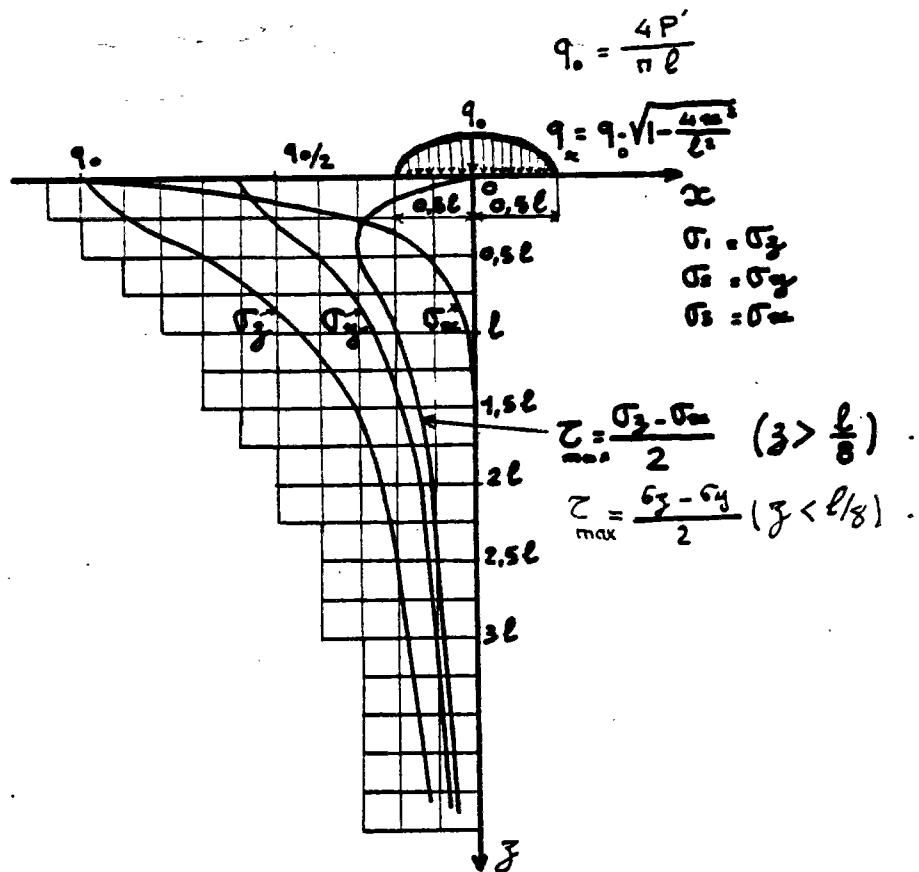


Fig. 3.20 - Variation des contraintes sur l'axe des z du semi-espace élastique, ([109]).

Les hypothèses simplificatrices qui nous permettraient d'utiliser la solution analytique ci-dessus sont les suivantes :

- la bille est indéformable,
- le sol forme un semi-espace élastique,
- la longueur de l'empreinte est très grande par rapport à sa largeur (par ex. $\frac{L}{l} > 10$),
- la charge extérieure est normale à la surface libre du massif et passe par l'axe du cylindre,
- le contact est lisse.

Notons que la prise en compte du frottement pose des problèmes théoriques importants. Si par exemple la loi de frottement est celle de Coulomb, on voit que dans la surface de contact il faut avoir des portions dans lesquelles les points des deux surfaces sont entraînés ensemble dans la déformation, et des portions où les surfaces glissent l'une sur l'autre. L'effet de frottement se traduit par une réduction du poinçonnement et des déflexions. Dans le cas des fondations superficielles, les calculs numériques réalisés ont mis en évidence que la diminution du tassement réversible due au frottement est inférieure à 9 % (Selvadurai (1979) [80] p. 9).

Une étude sur le frottement entre une sphère et un semi-espace élastiques, menée par C. Levy à l'aide du programme Rosalie (L.C.P.C.), montre que la variation de l'aire de contact sous l'effet du frottement par rapport au contact lisse est négligeable (Levy (1980) [55]).

Selon l'Eq. 3.6 la largeur d'empreinte est proportionnelle à la racine carrée de P' et de R mais elle diminue avec la racine carrée du module d'Young. En revanche, les contraintes maximales exercées augmentent avec

E . Ainsi une augmentation du module d'Young a pour effet de diminuer la largeur d'empreinte et d'augmenter les contraintes maximales tout en diminuant les contraintes en deça d'une certaine profondeur (voir la Fig. 3.33).

Afin de comparer les résultats expérimentaux avec ceux de la théorie de l'élasticité, les courbes de la variation de la largeur d'empreinte en fonction de la charge appliquée par unité de la longueur du cylindre, relatives aux deux cas, sont représentées sur la Fig. 3.21.

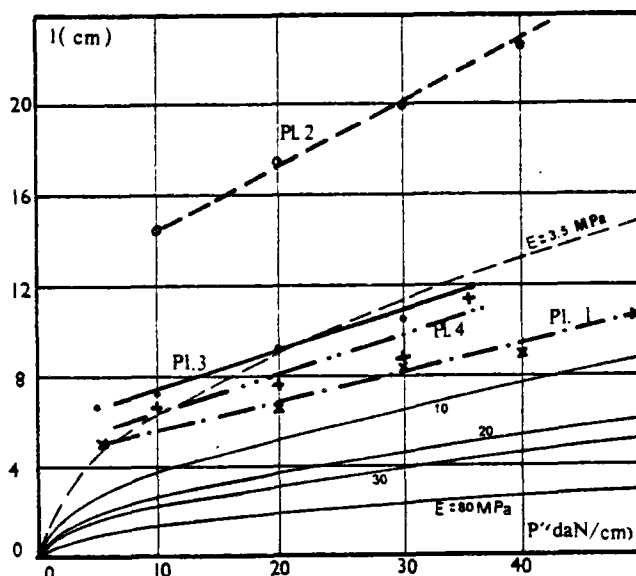


Fig. 3.21 - Largeur d'empreinte en fonction de la charge statique appliquée, comparaison des courbes expérimentales et analytiques.

Les constantes élastiques choisies pour les modèles mathématiques sont les modules mesurés par l'essai dynaplaque et le coefficient de Poisson choisi arbitrairement égal à 0,3 quel que soit le matériau. On notera que les variations du coefficient de Poisson ne modifie guère la largeur d'empreinte ainsi que les tensions appliquées au massif (Eq. 3.6 et 3.7).

On constate que quelle que soit la planche considérée la largeur mesurée est beaucoup plus grande que la valeur donnée par le modèle élastique correspondant. Dans le domaine des charges appliquées, compris entre $P' = 10$ et $P' = 50$ daN/cm, le gradient de la courbe expérimentale est légèrement supérieur à celui de la courbe théorique correspondante.

Approximativement, les courbes expérimentales peuvent être obtenues par de simples translations des courbes théoriques ($10 < P' < 50$) dans la direction de l'axe des empreintes.

Nous avons par ailleurs tracé la courbe théorique relative à $E = 3\,500$ kPa dont la largeur d'empreinte correspondant à $P' = 20$ daN/cm/l est égale à celle, mesurée, du limon de la planche N° 3. On voit que les courbes expérimentales des planches N° 1, 3 et 4 se trouvent à peu près entre les deux courbes théoriques relatives à $E = 3\,500$ et $10\,000$ kPa. Autrement dit, si le comportement des matériaux concernés était élastique linéaire, leurs modules d'Young devraient se situer entre les deux valeurs ci-dessus. Ceux-ci étant trop petits (environ 8 fois plus petits) au regards des valeurs mesurées par la dynaplaque, il est clair que le modèle élastique précédent ne représente pas le comportement réel des planches d'essais en ce qui concerne les variations de l'aire de contact.

Compte tenu du fait que le rapport $\frac{L}{l}$ des empreintes enregistrées est assez grand (supérieur à 10 pour les planches N° 1, 3 et 4) et que l'influence des déformations en direction de la longueur se limite à moins de $1/10^e$ de la longueur de chaque côté de la bille, il est évident que l'hypothèse de déformation plane ne peut pas être à la base des écarts constatés, il en est de même pour ce qui est de l'hypothèse de contact lisse. Les résultats d'un calcul par la méthode des éléments finis que nous avons faits antérieurement aux essais en utilisant le programme Rosalie (§ 3.5) montraient qu'effectivement le rôle de ce dernier paramètre était tout à fait négligeable.

L'importante discordance qui existe entre le modèle élastique et les essais en ce qui concerne l'accroissement rapide de l'aire de contact au début du chargement de la bille, et le fait que nous avons pu mesurer sur la dernière planche une certaine déflexion permanente à la fin des mesures, nous ont amenés à supposer que les écarts entre les valeurs mesurées et calculées de la largeur d'empreinte résultent de déformations "plastiques" du matériau qui se produisent au début de l'application de la charge et, surtout, dans la partie superficielle où les contraintes sont les plus élevées. Dans ce cas, le problème posé est celui du contact élasto-plastique ou, plus précisément, du poinçonnement d'un cylindre rigide dans un semi-espace dont les parties subissant des déformations irréversibles sont limitées et contenues à l'intérieur des zones élastiques. Il s'agit d'un problème non résolu par des méthodes analytiques.

3.5 - Etude par la méthode des éléments finis du contact bille-sol en élastoplasticité

La recherche de modèles théoriques pour les planches expérimentales coïncidait avec la mise au point d'un sous-programme, entreprise par A. Barbas (1981) [6] au L.C.P.C., qui, par le couplage de deux sous-programmes du Programme Rosalie, visait à résoudre au moyen de la méthode des éléments finis les problèmes relatifs au contact des corps élasto-plastiques.

On a donc pu réaliser, avec A. Barbas; une étude numérique pour, d'une part, établir, à l'aide de la méthode des éléments finis, un modèle théorique pouvant expliquer les résultats des essais antérieurs, et d'autre part pour essayer, en résolvant un problème typique de contact en élasto-plasticité pour lequel on dispose à la fois d'une solution analytique en élasticité pure et de certaines données expérimentales non explicables par cette solution, le fonctionnement du programme avant sa mise en application définitive.

3.5.1 - Introduction au programme de calcul traitant les problèmes de contact des solides élastoplastiques

a) Programme Rosalie

Le programme (ou système) Rosalie est un ensemble de programmes de calcul par la méthode des éléments finis. La version actuelle de ce programme est évolutive et tient compte des développements les plus récents des méthodes de calcul et de l'informatique. Les domaines d'application de ce programme sont les suivants :

- élasticité, élastoplasticité, viscoélasticité, grandes déformations, dynamique, études des milieux discontinus ;
- les écoulements en milieu poreux ou fissuré, avec ou sans surface libre, en régime permanent ou transitoire ;
- les répartitions de température en régime permanent ou transitoire ;
- les couplages, c'est-à-dire la thermoélasticité ou la consolidation, pour les problèmes plans, à symétrie de révolution et tridimensionnels.

Le système Rosalie comprend aujourd'hui :

- 16 sous-ensembles appelés "Groupes" dont chacun couvre un certain domaine de problèmes (massif, poutres, coques, etc.) ;
- 3 modules de maillage ;
- un système de vérification du maillage et des données du calcul, appelé Test, composé de 16 modules correspondant aux 16 groupes ;
- un programme de sorties des résultats sous forme graphique, Trace, composé également de 16 modules.

La structure de l'ensemble des différentes parties du programme Rosalie est représentée par le schéma de la Fig. 3.22. Pour plus de détails voir Guellec (1976) [38], Guellec, Humbert, Ricard (1976) [40] et Guellec, Ricard (1974) [41].

Les problèmes de contact sont traités par le groupe 5 du programme Rosalie.

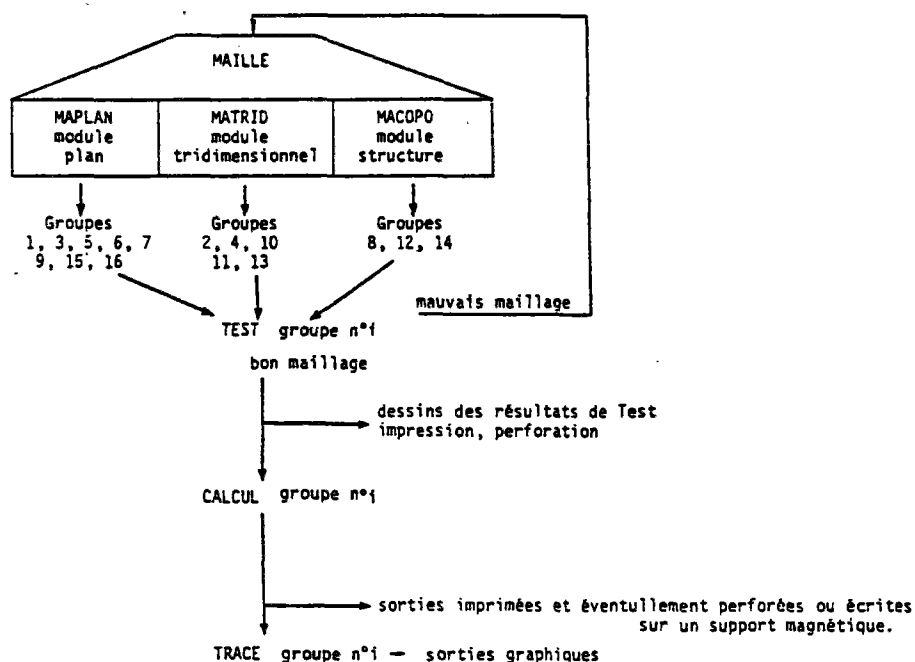


Fig. 3.22 - Schéma de la structure du Programme Rosalie [38].

b) Structure du Groupe 5

Le sous-ensemble "Groupe 5" traite les domaines suivants (en petites déformations) :

- élastoplasticité ;
- viscoélasticité ;
- contact (décollement-frottement) ;
- dilatance ;
- dynamique pas à pas (massifs).

Le domaine d'application du Groupe 5 se limite actuellement aux problèmes plans ou à symétrie de révolution et aux cas des milieux isotropes. Il est composé des modules suivants :

- Maplan et Map qui permettent de faire des maillages automatiques dans tous les domaines d'application.
- Test 5, qui vérifie le maillage et les données du calcul. Il assure un calcul numérique exact.
- Groupe 5, qui comprend les sous-programmes concernant la gestion du calcul comme l'organisation des données, calcul et stockage de la matrice de rigidité globale.
- Plan 5 et Axis 5, qui regroupent les sous-programmes suivant que le problème traité est plan ou à symétrie de révolution.
- Calcul 5, qui regroupe les sous-programmes correspondant à la résolution numérique.
- Trace 5, qui exécute les sorties graphiques.

Les éléments utilisés par Groupe 5 pour le massif sont des triangles à 6 noeuds, T6, ou des quadrilatères à 8 noeuds, Q8. Ce sont des éléments isoparamétriques avec interpolation quadratique pour les déplacements (u et v). Groupe 5 utilise aussi des éléments de continuité à deux noeuds, CT1, et des éléments raidisseurs à 3 noeuds.

Il convient de noter que le programme Rosalie utilise le "modèle déplacement" et que la minimisation de l'énergie potentielle du système étudié permet de résoudre l'équation matricielle ci-dessous pour déterminer les déplacements inconnus des points de maillage.

$$[F] = [R] \cdot [U] \quad (3.8)$$

où $[F]$ est le vecteur des forces généralisées ;
 $[R]$ est la matrice de rigidité généralisée ;
 $[U]$ est le vecteur des déplacements généralisés.

En ce qui concerne les problèmes de contact, le sous-programme initial (Frotta), créé en 1977 par R. Frank, P. Guellec et P. Humbert, ne traitait que des corps élastiques. Ce programme a été modifié et couplé avec le sous-programme modélisant le comportement élasto-plastique de massifs (PLASTO) par A. Barbas au cours de l'année 1980. En effet, le problème de contact bille-sol élastoplastique a été un des premiers problèmes traités dans le domaine de contact des corps élastoplastiques par le Groupe 5 du programme Rosalie. Pour toute précision concernant les algorithmes "FROTTA" et "PLASTO" ainsi que les sous-programmes de couplage (IFROPL), voir la thèse de A. Barbas (1981) [6].

Nous nous limitons ici à rappeler certains points essentiels relatifs au fonctionnement du sous-programme utilisé :

c) Lois de comportement de la discontinuité

Ces lois de comportement sont définies dans le cadre de la plasticité, d'une part par les critères de contact et d'autre part par les lois d'écoulement. L'état de glissement est donné par le critère de frottement de Coulomb :

$$|\tau| - c + \sigma \tan \phi = 0$$

avec c : la cohésion,
 ϕ : l'angle de frottement,
 $|\tau|$: la contrainte tangentielle à la discontinuité,
 σ : la contrainte normale à la discontinuité (positive en traction).

Pour des points en état collé ou de glissement on doit vérifier :

$$\sigma - r_t \leq 0$$

où r_t est la résistance à la traction.

L'état de décollement est donné dès que $\sigma = r_t$ et on doit alors vérifier $\sigma = \tau = 0$.

Si le critère de Coulomb est atteint, on n'autorise que des déplacements relatifs tangentiels Δu , et les déplacements relatifs normaux Δv sont nuls. Si le critère de résistance à la traction est atteint, il y a décollement et le déplacement relatif Δu est quelconque, alors que le déplacement relatif Δv a un signe imposé, indiquant que les domaines s'éloignent l'un de l'autre. L'interpénétration étant interdite, le contact est dit "unilatéral" (voir Frémond (1980) [34]). Les lois d'écoulement sont donc non associées par rapport aux critères de plasticité et le potentiel plastique est celui de l'interface lisse avec décollement (voir Salançon (1978) [78]). La figure 3.23 indique ces deux critères ainsi que les directions de déplacements Δu et Δv .

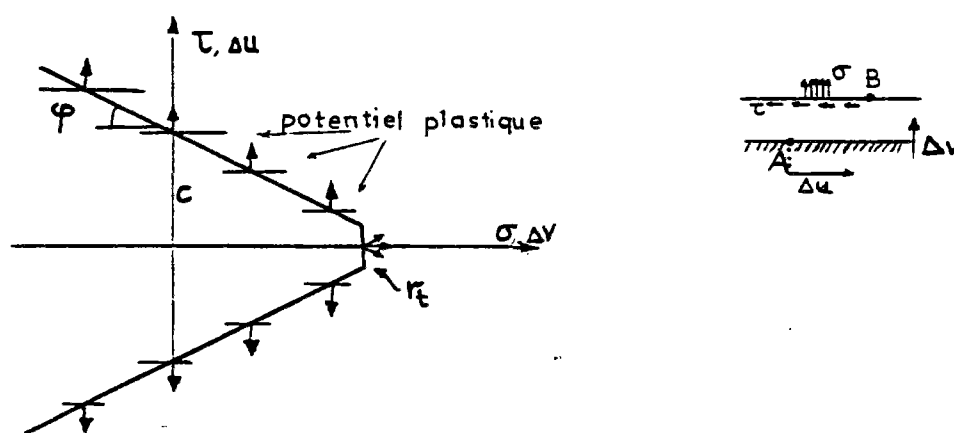


Fig.3.23 - Critère de frottement de Coulomb avec résistance à la traction le long d'une discontinuité.

Éléments de continuité

Pour modéliser la discontinuité entre deux corps en contact, on dédouble les noeuds le long de la discontinuité et on associe à chaque noeud du milieu M1 "son double" du milieu M2 pour former un élément de continuité (Fig. 3.24). A chaque élément de continuité, on attribue une "épaisseur" qui est égale à la distance initiale de deux points considérés. Ces éléments sont en effet des ressorts très rigides de longueur nulle qui imposent la continuité de déplacements pour les noeuds dédoublés qui se trouvent effectivement en contact.

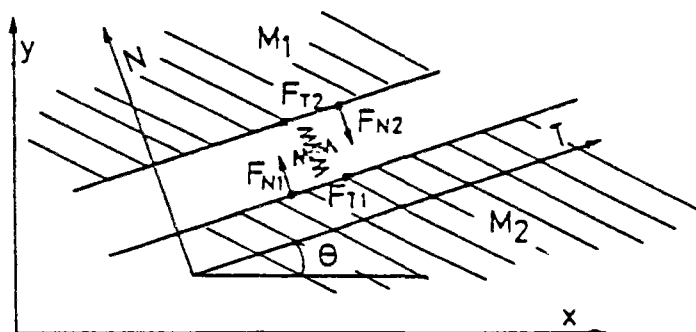


Fig. 3.24 - Éléments de continuité et forces de contact [38].

Critère de contact

Les différents critères utilisés sont traduits en termes des forces nodales, par conséquent, c'est la continuité des forces que l'on assure aux noeuds en contact. On peut donc écrire :

I - Critère de résistance à la traction :

$$F_{N1} = F_{N2} > - r_t S$$

où S est l'aire de la surface d'influence d'éléments dépendant du type d'éléments du massif utilisé et r_t est la résistance unitaire à la traction.

II - Critère de frottement de Coulomb :

$$|F_{T2}| < |c S + F_N \operatorname{tg} \phi|$$

III - Le caractère unilatéral du contact impose que pour les joints décollés l'on ait :

$$v_1 - v_2 < e$$

où e est l'ouverture initiale du contact.

Ces critères en termes de forces et de déplacement sont schématisés par les Fig. 3.25 et 3.26 ; [38].

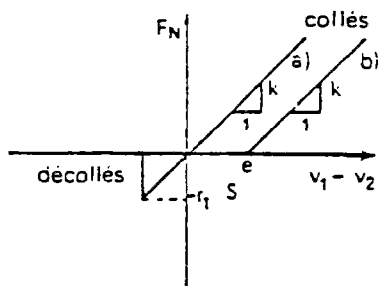


Fig. 3.25 - Comportement dans la direction normale : a) joint à ouverture initiale nulle, b) joint à ouverture initiale e .

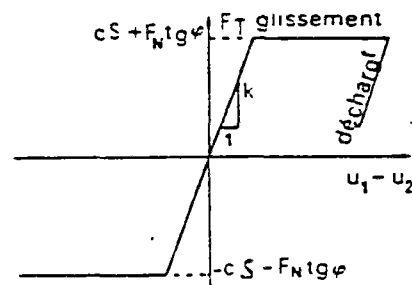


Fig. 3.26 - Comportement dans la direction tangentielle.

IV - Il faut définir enfin la loi de glissement (avec frottement) qui s'applique uniquement aux points qui glissent l'un par rapport à l'autre. Elle impose la forme de contact tangentielle égale à la force de frottement limite de Coulomb :

$$F_T = F_{T2} = cS + F_N \operatorname{tg} \phi$$

- Exemple : modélisation de l'ensemble bille-sol à l'aide des éléments de continuité.

Cette méthode nous permet de schématiser l'ensemble bille-massif du sol par le modèle de la Fig. 3.27 dans lequel la bille (supposée indéformable) est représentée par une bande rectangulaire de longueur égale à celle du modèle du sol. Par ailleurs, pour assurer la rigidité de cette bande, on introduit des éléments de continuité entre les points supérieurs interdisant tout déplacement relatifs de ces points. (voir § 3.5.2).

En fait, il n'est pas possible d'attribuer un module d'élasticité très important au modèle de la bille car, dans les cas où le rapport entre les modules d'élasticité de la bille et du sol dépasse la valeur de 10^5 , le programme de calcul ne fonctionne plus normalement.

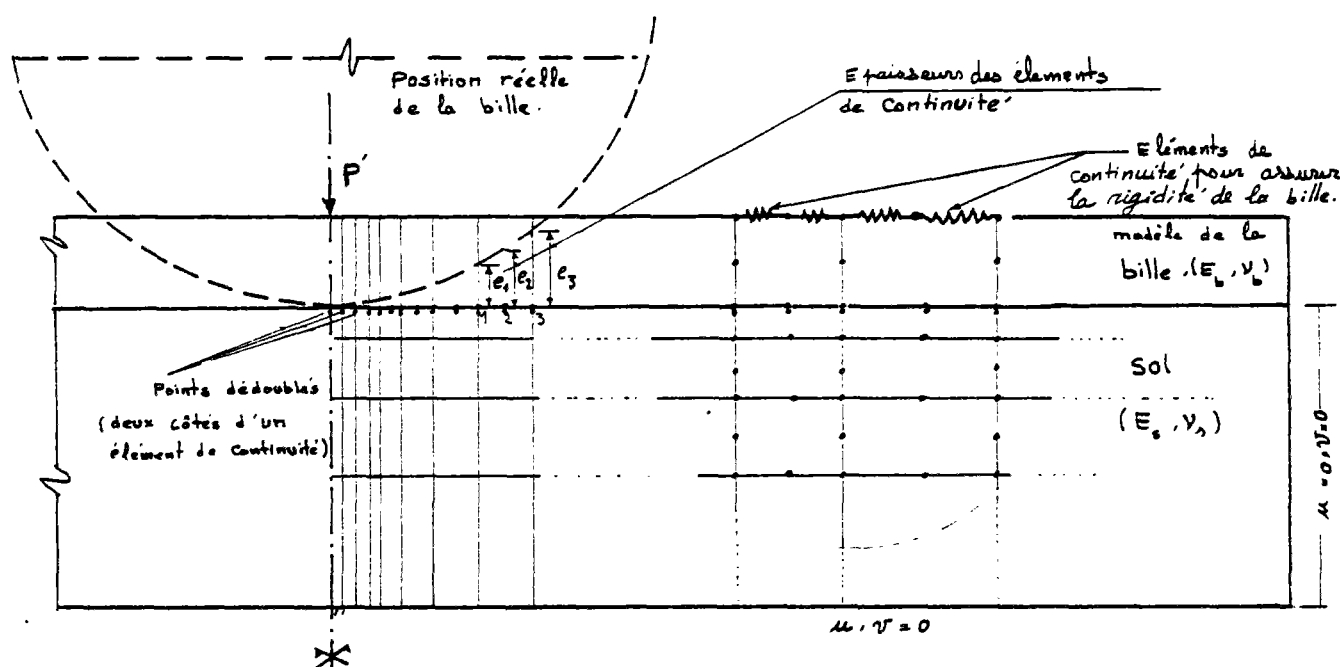


Fig. 3.27 - Applications d'éléments de continuité dans la modélisation de l'ensemble sol-cylindre rigide.

Le problème que nous traitons est en déformations planes et présente un plan de symétrie en absence des forces extérieures horizontales et des moments par rapport à l'axe de la bille. Ainsi, l'axe de la bille est situé dans le plan de symétrie - Fig. 3.27.

Suivant l'état de contact de l'élément considéré, on impose deux, une ou aucune continuité de déplacements. Ainsi, pour les éléments de contact que l'on considère comme liés, on impose la continuité des déplacements suivant les axes locaux T et N (Fig. 3.24); pour les éléments considérés en état de décollement, on n'impose aucune continuité et, enfin, pour les éléments qui glissent, on impose seulement la continuité de déplacements suivant l'axe N. Ainsi, dans le cas de contact bille-sol, on impose la continuité de déplacements suivant les axes T et N uniquement pour le point situé sur l'axe de symétrie qui est le point de contact initial.

d) Lois de comportement élastoplastique des corps en contact

Le sous-programme PLASTO applique les critères de plasticité suivants :

- critère de Tresca,
- critère de Coulomb,
- critère de Von Mises (avec écrouissage),
- critère de Drucker et Prager,
- critère parabolique.

Les lois d'écoulement relatives à ces critères sont les lois associées.

Dans l'annexe N° 2, nous donnons une brève introduction sur la théorie de ^{la} plasticité ainsi que sur la formulation mathématique des critères ci-dessus.

e) Déroulement du calcul

Pour résoudre l'équation matricielle de l'équilibre du système soumis aux charges extérieures, le calcul se déroule suivant un processus itératif, partant de l'état initial de contact. A chaque itération, sont vérifiés, d'une part, les critères de contact, c'est-à-dire ceux de glissement, de décollement et de recolllement et, d'autre part, les critères de plasticité en tout point des massifs en contact. Par ailleurs, la résolution des équations non-linéaires de l'équilibre des massifs élastoplastiques se fait, à chaque itération, par une méthode incrémentale (méthode des contraintes initiales) dont le nombre d'incréments est en général inférieur à 5. Si les critères de contact ne sont pas satisfaits, le programme corrige, selon le cas, les forces de contact et (ou) la matrice de rigidité pour commencer l'itération suivante.

- L'itération

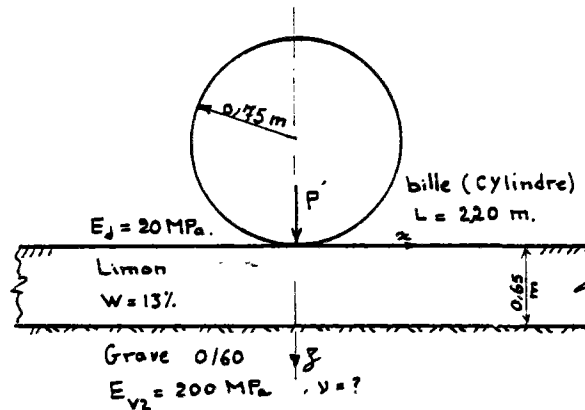
Si la charge appliquée entraîne des modifications trop importantes du contact, il est souvent nécessaire de la décomposer en plusieurs incréments, pour diminuer le nombre d'itérations et favoriser la convergence.

- Tolérance

Le nombre d'itérations dépend de la tolérance maximale que l'on choisie pour la convergence des critères de contact et de plasticité. Pour le premier nous avons choisi la valeur de 0,001 et pour le deuxième 0,01.

Notons enfin que, en raison de la complexité des problèmes de contact dans lesquels les forces d'interaction et la surface de contact sont inconnues, et de la non-linéarité du comportement des massifs élastoplastiques la méthode numérique ci-dessus comprend de nombreuses corrections de la matrice de rigidité globale du système et des forces d'interaction et, par conséquent, nécessite un temps de calcul considérable.

3.5.2 - Approche numérique du problème de contact bille-sol



3.28 - Schéma de la planche n° 3

a) Modélisation du problème

Les schémas des problèmes à résoudre sont indiqués sur la Fig. 3.28. Le contact initial s'établissant sur une génératrice de la bille, il s'agit de calculer pour chaque planche la variation de la largeur d'empreinte en fonction de la charge appliquée à l'interface.

Le rapport entre la longueur et la largeur de l'empreinte étant suffisamment grand (~ 10), l'hypothèse de déformation plane a été retenue ; par ailleurs, en l'absence de toute force horizontale, le problème est symétrique par rapport au plan vertical passant par l'axe du cylindre.

La modélisation a été faite à l'aide de deux maillages différents : l'un destiné aux planches N° 4 et N° 1 (384 points, 99 éléments Q8 et 68 éléments de continuité CT1), l'autre aux planches N° 2 et N° 3 ; mais, le procédé du calcul automatique étant très long -donc cher- dans le cas du matériau frottant, on s'est limité finalement au cas de la planche N° 3 (limon, $W = 13\%$; $E_d = 20\text{ MPa}$) dont le maillage correspondant est indiqué par la Fig. 3.33. Il a 291 points, 77 éléments de type quadrilatère à 8 noeuds (Q8) qui modélisent la couche de limon et la bille, et 45 éléments de continuité (éléments à 2 noeuds CT1). L'hypothèse d'indéformabilité de la bille nous permet de la schématiser par une bande dont la longueur est égale à celle du modèle du massif (§ 3.5.1.c).

b) Conditions aux limites

La limite latérale du modèle étant suffisamment loin de la zone de contact, les déplacements imposés sont nuls. En ce qui concerne la limite inférieure, qui est, en effet, la limite entre le limon et la base de la fosse (grave compacte), supposée comme étant semi-infini, nous avons évalué, à l'aide d'un calcul en élasticité pure, l'influence de sa déformabilité. Sur la réponse du modèle, en supposant un modèle de Winkler pour le massif semi-infini : on constate que les erreurs introduites en considérant la limite inférieure indéformable ($u = v = 0$), par rapport au modèle doté de ressorts à sa base, n'atteignent pas 3 %. On a donc imposé les déplacements nuls à la base.

De la même manière, les résultats de deux calculs en élasticité pure, l'un pour le contact lisse (c et $\phi = 0$), l'autre pour le contact avec frottement ($c = 0$ et $\phi = 25^\circ$), ont démontré que l'influence du frottement sur la variation de la largeur d'empreinte est négligeable (indécelable par le modèle discret). La seule différence significative est la distortion des isocontraintes au voisinage de l'aire de contact (jusqu'à 10 cm environ de profondeur) sous l'effet des tensions tangentielles. Dans le cas du massif élastoplastique, l'introduction du frottement augmente considérablement le nombre des itérations, ce qui nécessite un temps de calcul nettement plus élevé que dans le cas du contact sans frottement. Toutefois un calcul avec un incrément de chargement a pu être fait selon lequel l'influence du frottement sur la largeur d'empreinte était négligeable.

Notons enfin que l'erreur maximale due à la seule discrétisation de l'aire de contact est de 1,5 cm.

c) Choix de critères de plasticité

Quant au choix des critères de plasticité, les remarques suivantes s'imposent :

- premièrement, on ne dispose pas de résultats d'essais en laboratoire définissant la fonction de charge, les lois d'écoulement et d'écrouissage propres au matériau utilisé ; la détermination de ces caractéristiques nécessite d'ailleurs un travail délicat et long dont les précisions exigées seraient disproportionnées par rapport à celles des essais en vraie grandeur réalisés.

- deuxièmement, le limon de la planche N° 3 est un sol non saturé ($S = 88\%$) et soumis à un chargement relativement lent (§ 3.2). Or les seuls résultats d'essais en laboratoire dont on dispose sont ses caractéristiques intrinsèques déterminées au moyen des essais triaxiaux consolidés non drainés (§ 3.3).

Ainsi, faute de données précises concernant le comportement élastoplastique du matériau, on a dû essayer différents critères et paramètres dans le but de parvenir à un modèle qui expliquerait au moins qualitativement les résultats expérimentaux précédents.

Pour la bille, on impose un comportement élastique très rigide dans tous les calculs :

Module d'Young, $E = 2.10^5$ MPa

Coefficient de Poisson, $\nu = 0,25$.

Les paramètres élastiques du sol sont les suivants :

$E = 20$ MPa,

$\nu = 0,35$ (choisi approximativement)

le sous-programme IFR OPL1 a été choisi.

Dans une première étape, un calcul en élasticité et trois calculs en élastoplasticité ont été effectués. Les critères et paramètres correspondants sont les suivants :

1. Critère de Coulomb avec $\phi' = 30^\circ$ et $c' = 45$ kPa.
2. Critère de Von Mises avec $c_u = 45$ kPa ($K = \frac{2c_u}{\sqrt{3}}$)
3. Critère de Von Mises avec $c_u = 35$ kPa.

Ensuite nous avons essayé le critère de Drucker avec $c' = 10$ kPa et $\phi' = 16,5^\circ$.

Enfin un calcul pour un seul incrément de charge et utilisant le critère de Von Mises avec écrouissage ($c_u = 35$ kPa et coefficient d'écrouissage = 0,27 ($\tan 20^\circ$)) a donné des résultats qui sont très peu différents de ceux du calcul N° 3.

Notons que dans le premier calcul, on a choisi arbitrairement une grande cohésion, car le nombre d'itérations, qui est normalement une fonction croissante de l'étendue des zones plastiques, augmente très rapidement avec la diminution de la cohésion.

En ce qui concerne la durée des calculs effectués, on rapporte, à titre d'indication, le nombre des itérations de frottement et de décollement et le temps de calcul relatifs aux cas élastiques et élastoplastiques (calcul N° 3) dans le tableau 3.5. On constate que le temps de calcul dans le cas élastoplastique est beaucoup plus grand que celui du cas élastique.

Numéro d'incrément	Charge appliquée par inc. (daN/cm)	Valeur cumulée de la charge	Nombre des itérations	
			Calcul élastique	Calcul élastoplastique (N° 3)
1	10	10	3	40
2	10	20	2	42
3	10	30	1	52
4	10	40	1	80

(a)

	Cas élastique	Cas élastoplastique
Durée de calcul pour 4 incréments de charge sur IBM 360 (CIRCE), second	~ 10	~ 145

(b)

Tableau 3.5 - Nombre des itérations de frottement et de décollement (a) et durée de calcul (b) pour deux calculs en élasticité et en élastoplasticité.

d) Analyse des résultats

Sont indiquées sur la Fig. 3.29 les courbes de la variation de la largeur d'empreinte en fonction de la charge appliquée et relatives aux résultats expérimentaux, à la solution analytique (semi-espace élastique), au modèle discret élastique et aux modèles discrets élastoplastiques. On constate à partir de la comparaison de ces courbes que :

- le modèle discret élastique présente une réponse assez proche de celle du semi-espace élastique, ce dernier donnant des valeurs légèrement plus grandes ;
- le comportement du modèle élastoplastique correspondant au premier calcul est plutôt élastique que plastique. Ceci est dû à la forte cohésion attribuée à ce modèle ;
- les courbes correspondant aux autres calculs élastoplastiques sont en fait des droites qui passent par l'origine. Dans le cas du critère de Von Mises la pente de la droite croît lorsque la cohésion diminue ;
- quoique les valeurs relatives aux modèles élastoplastiques (mis à part le modèle du premier calcul) soient quantitativement plus proches des résultats expérimentaux que ceux des modèles élastiques, il n'existe pas une concordance satisfaisante entre le résultat expérimental et la réponse de ces modèles.

En ce qui concerne la déflexion au centre de l'empreinte (Fig. 3.30), il convient de rappeler que le modèle aux éléments finis considère un cylindre infiniment long (hypothèse de déformation plane) reposant sur une couche aux limites inférieures indéformables. Evidemment les erreurs introduites par ces deux hypothèses sont opposées, toutefois il est impossible d'établir un lien quantitatif entre les déflexions réelles et théoriques. Ainsi, bien que la largeur d'empreinte et les contraintes sous l'axe de symétrie longitudinale de la bille ne soient guère affectées par les hypothèses ci-dessus, il n'en est pas de même pour la déflexion; par conséquent il est difficile de comparer les résultats théoriques et expérimentaux de la Fig. 3.30.

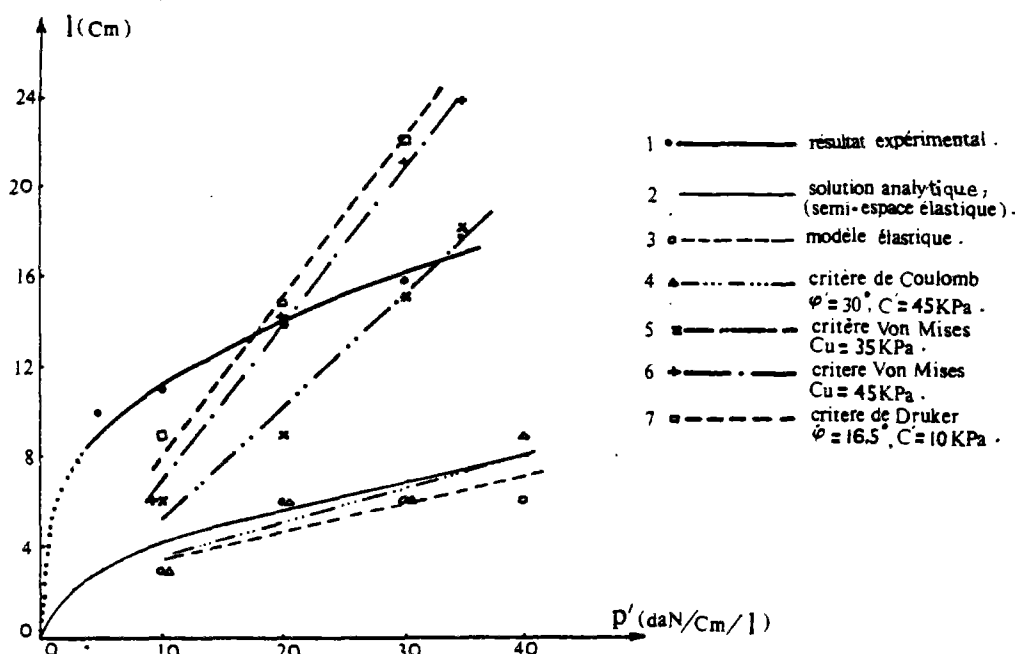


Fig. 3.29 - Largeur de l'empreinte en fonction de la charge statique appliquée ;
Comparaison des résultats expérimentaux et théoriques.

Les déformées du maillage relatives aux calculs élastique et élastoplastique (critère^{de} Von Mises, $c_u = 35$ kPa) et l'extension, au cours du chargement, des zones plastifiées (Mises, $C_u = 45$ KPa), sont indiquées sur les Fig. 3.31, 3.32 et 3.33.

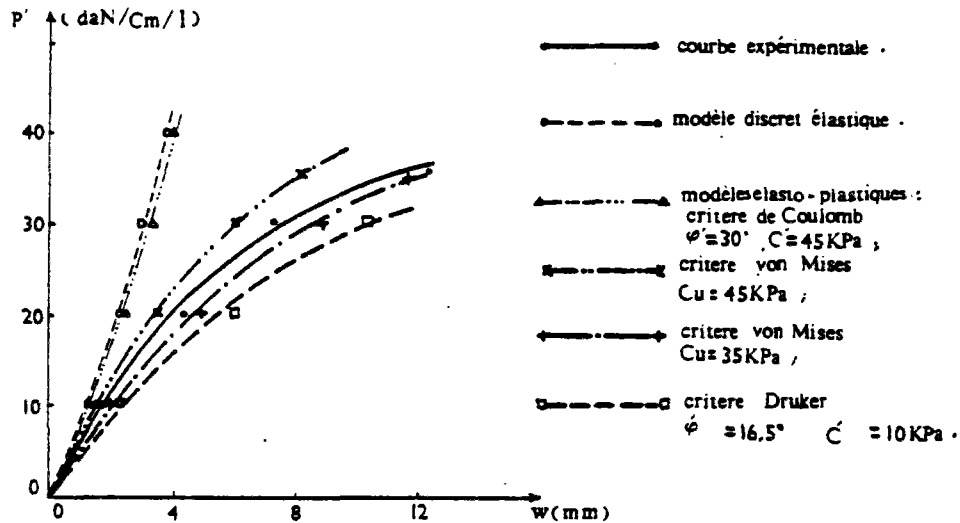


Fig. 3.30 - Déflexion sous l'axe de la bille ($x = 0$) en fonction de la charge statique appliquée.

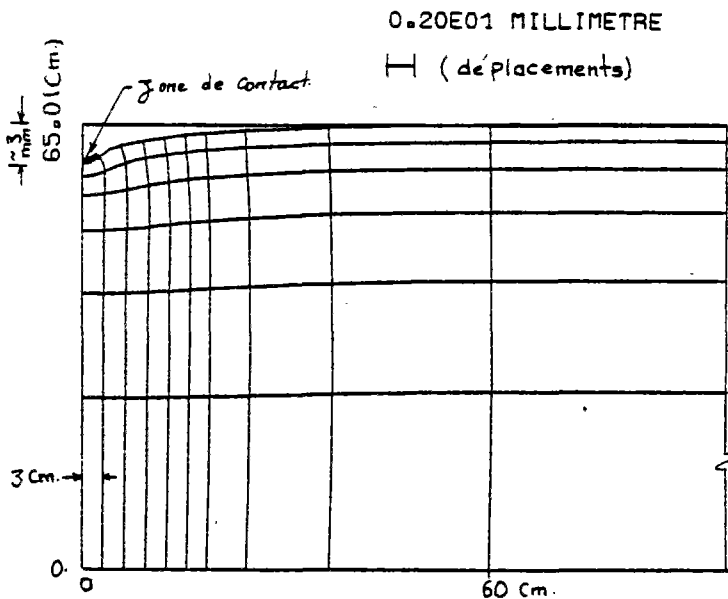


Fig. 3.31 - Déformée du maillage de sol ; calcul élastique, $p' = 30$ daN/Cm/l.

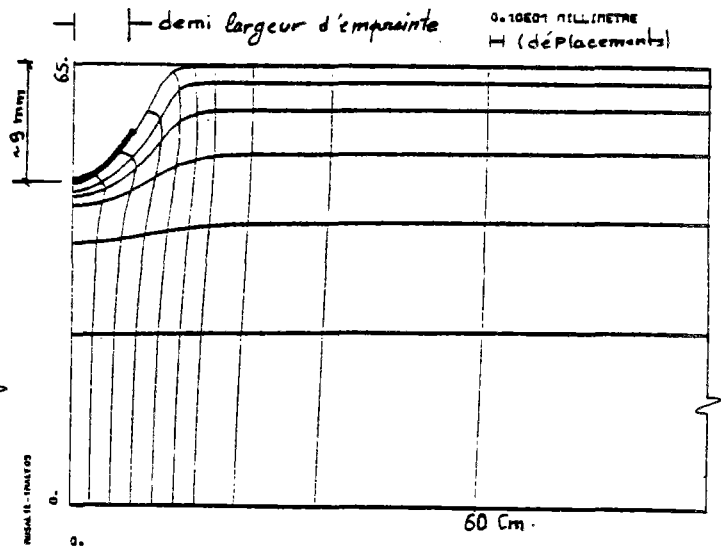


Fig. 3.32 - Déformée du maillage de sol ; calcul élasto-plastique (von Mises $C_u = 35$ KPa.), $p' = 30$ daN/Cm/l.

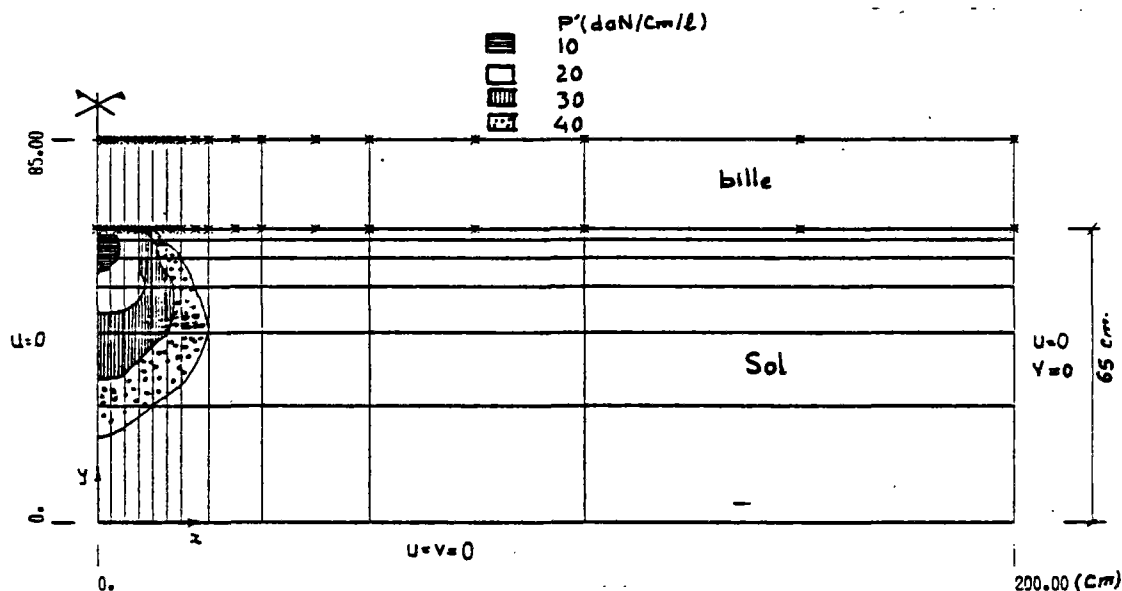


Fig. 3.33 - Zones "plastiques" correspondant aux étapes successives de chargement (critère Von Mises $C_u = 45$ KPa).

La discordance entre la variation de la largeur d'empreinte mesurée et la réponse des modèles élasto-plastiques d'une part et la ressemblance qui existe entre la courbe expérimentale et celle du semi-espace élastique d'autre part, nous ont conduit à penser que la rapide croissance "initiale" observée de l'aire de contact résulterait des facteurs correspondant au comportement du sol dans une zone limitée autour de l'aire de contact qui n'a pas été prise en compte dans les modèles théoriques. L'idée que ces facteurs soient liés au comportement de la zone de contact vient du fait que la courbe expérimentale relative à la déflexion qui dépend davantage du comportement "global" de la structure ne reflète aucun changement important du comportement.

Parmi les différents facteurs tels que l'anisotropie, l'écrouissage, l'hétérogénéité, la dilatace, etc., l'hétérogénéité du matériau nous a paru être le facteur le plus déterminant dans la mesure où la partie superficielle des matériaux compactés par les rouleaux vibrants est en général mal compactée, même décompactée en raison d'introduction de grands déviateurs de contrainte en surface. Notons qu'en pratique il est très difficile de mesurer la compacité de cette partie supérieure (de quelques centimètres de profondeur) et le limon étant cohérent nous avons négligé ce facteur dans les premières approches.

e) Modèle.....hétérogène (élastique)

Utilisant le maillage précédent, nous avons établi un modèle hétérogène qui est en effet un bicouche (Fig. 3.34) dont la couche inférieure (de 58,5 cm d'épaisseur) a pour constantes élastiques les valeurs précédentes :

$$E_2 = 20 \text{ MPa et } \nu_2 = 0,35.$$

Pour la couche supérieure (de 6,5 cm d'épaisseur) un très faible module d'élasticité a été choisi :

$E_1 = 3\,500\text{ kPa}$ et $\nu_1 = 0,35$ dans le premier calcul

$E_1 = 2\,000\text{ kPa}$ et $\nu_1 = 0,35$ dans le deuxième calcul.

Les déplacements sont continus sur l'interface de deux couches.

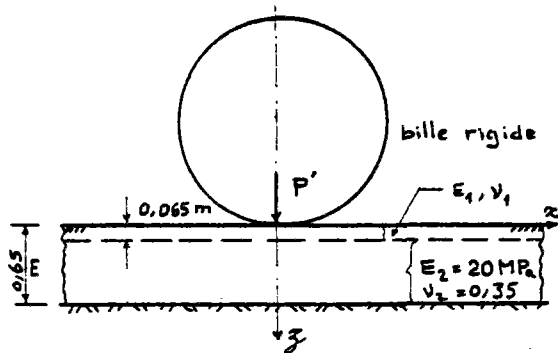


Fig. 3.34 - Structure à couche supérieure décompactée (modèle non homogène).

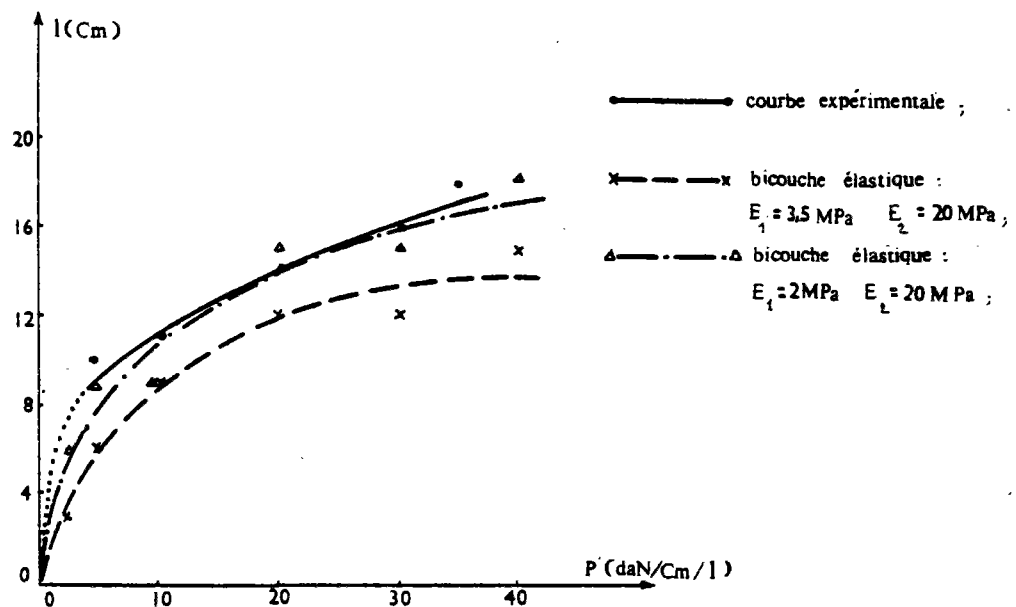


Fig. 3.35 - Largeur de l'empreinte en fonction de la charge statique appliquée ;
Comparaison des résultats expérimentaux avec la réponse des modèles
(élastiques) non homogènes.

Comme on le voit sur la Fig. 3.35, la réponse du modèle hétérogène s'accorde assez bien avec la courbe expérimentale. Ainsi, bien qu'en réalité la partie décompactée ait un comportement plus compliqué qu'élastique pure et que la variation du module d'élasticité soit continue, la seule hypothèse attribuant un très faible module d'élasticité à la partie supérieure du matériau explique les variations réelles de l'aire de contact bille-sol.

f) Remarque sur les contraintes induites

La comparaison des résultats des calculs précédents avec les valeurs mesurées par des capteurs de pression montre que les pressions mesurées sont toujours beaucoup plus grandes que les valeurs calculées. A titre d'exemple nous avons indiqué sur la Fig. 3.36 la variation en profondeur des valeurs mesurées et les résultats de certains calculs. Comme il est souligné précédemment (§ 3.3) la présence de ces capteurs à l'intérieur du matériau constitue une perturbation majeure des isocontraintes et l'erreur qui en résulte est difficilement évaluable, par conséquent l'écart systématique important entre la courbe expérimentale d'une part et les courbes théoriques d'autre part, laisse supposer que les valeurs mesurées seraient toujours supérieures aux valeurs réelles.

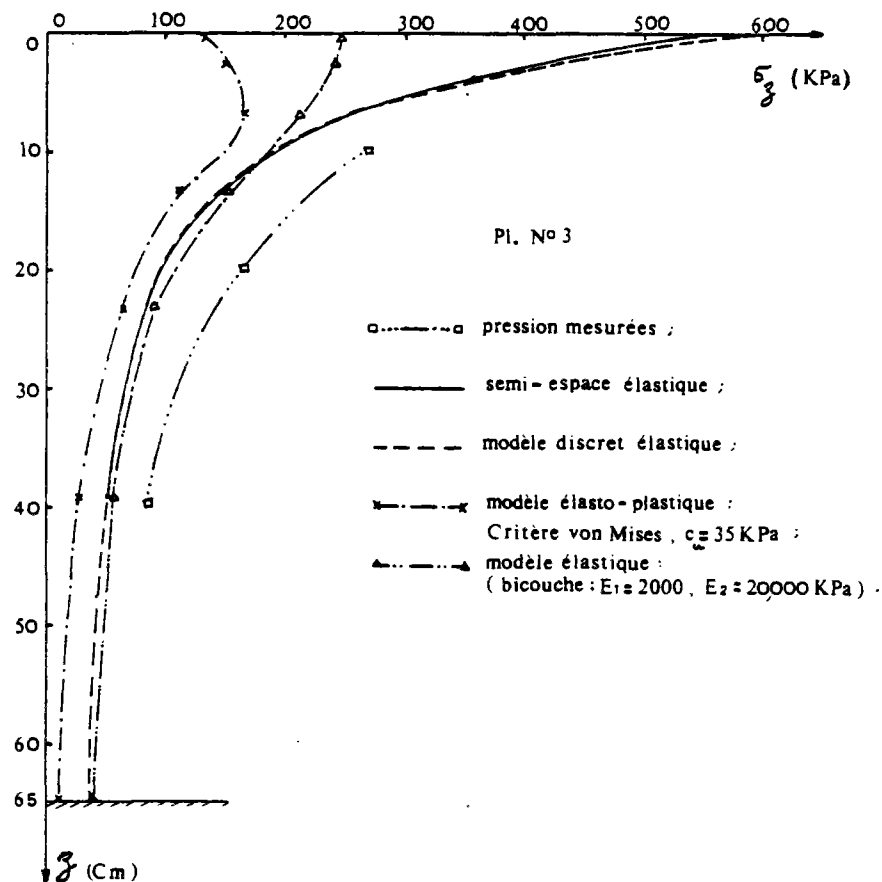


Fig. 3.36 - Variation en profondeur de la pression induite (dans le plan de symétrie) ; Comparaison des valeurs mesurées avec les résultats des calculs.

3.6 - CONCLUSIONS

Les essais réalisés, nous permettent de mieux connaître la largeur réelle de l'empreinte du cylindre et ses variations sur deux matériaux granulaires différents. Par ailleurs, la comparaison des résultats expérimentaux avec la solution analytique (semi-espace élastique) et l'examen de la réponse des différents modèles numériques à comportement élasto-plastique simulant les planches d'essai, font apparaître le rôle des principaux facteurs dont dépend le phénomène réel. On constate ainsi que :

- Quels que soient le matériau et la charge statique appliquée, la valeur absolue de la largeur d'empreinte est nettement plus grande que celle donnée par la solution analytique.
- Cet écart résulterait, en premier lieu, de la très faible résistance mécanique de la partie supérieure de la couche, partie dont il est très difficile de mesurer la compacité ou la déformabilité à l'aide des moyens de mesures actuels. Il traduit en fait le décompactage sur quelques centimètres de profondeur du matériau sous l'action des efforts tangentiels lors du roulement du cylindre (bille).
- C'est pourquoi, pour les valeurs courantes de la charge statique appliquée ($P' > 10 \text{ daN/cm/l}$), la variation de l'aire de contact en fonction de celle-ci ou du module de déformabilité "global" de la structure sous-jacente suit à peu de chose près la loi élastique.

Ce dernier point présente un intérêt particulier dans la mesure où ce sont plutôt les variations de l'aire de contact en fonction du module d'élasticité qui sont essentielles dans l'évolution du comportement vibratoire de l'ensemble sol-rouleau vibrant. Ainsi, quoique le matériau subisse des déformations irréversibles, l'hypothèse du massif semi-infini élastique se trouve applicable dans les études présentées au chapitre précédent.

Chapitre 4

ETUDE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES MASSIFS SEMI-INFINIS

INTRODUCTION

Comme nous l'avons rappelé au premier chapitre (§ 1.4), parmi les paramètres dont on mesure les variations au cours des essais VIBREX, deux concernent le matériau compacté : la pression et l'accélération induites. L'installation de plusieurs capteurs au sein du sol et à différentes profondeurs permet d'enregistrer la variation dans le temps de ces paramètres lors des passes successives du rouleau vibrant. Ainsi, les résultats de ces mesures, effectuées sur plusieurs dizaines de planches expérimentales, constituent un ensemble de données considérable sur le comportement vibratoire du matériau granulaire qui reste à exploiter.

Cela étant, nous avons entamé, au titre d'un premier essai et parallèlement aux études relatives au deuxième chapitre, une approche théorique du problème qui vise à déterminer la variation des sollicitations induites en fonction de différents facteurs principaux tels que la variation des caractéristiques mécaniques du matériau, les conditions aux limites, etc.

Vu l'extrême complexité du problème et le nombre considérable d'inconnues dont la principale est la loi de comportement réel du matériau (notons que les mesures ci-dessus ne permettent pas de définir le tenseur de contraintes), il faut évidemment le simplifier afin de le ramener à la portée des moyens de calcul disponibles. Ces derniers consistent en, d'une part, des méthodes fondées sur les résolutions analytiques et, d'autre part, des méthodes numériques telles que la méthode des Eléments Finis. C'est cette dernière que nous utilisons pour étudier les variations des déplacements, accélérations et contraintes à l'intérieur du massif semi-infini.

En ce qui concerne les études analytiques, on dispose de nombreuses solutions correspondant à la vibration des massifs semi-infinis, isotropes, élastiques, homogènes ou stratifiés ; citons à titre d'exemple quelques références : Lamb [51], Fung [36], Quinlan [73] et Sung [84] pour le semi-espace élastique ; Ewing, Jardetsky, Press [30] pour les massifs semi-infinis élastiques stratifiés ; Frémond [33] pour les structures visco-élastiques stratifiées ; Barkan [7] et Richart, Hall, Woods [75] pour différents aspects de la vibration des fondations superficielles ; Prange [69] pour la propagation des ondes dans les sols et enfin Avramesco [4], [5], Mucci et Baron [66], Mucci et Christory [67] et Vakili [88] pour les différents aspects de l'auscultation dynamique des chaussées.

La figure 4.1. indique la position de la zone chargée lorsque le rouleau se trouve au milieu de la longueur de la fosse d'essais. On remarque que la surface chargée forme une bande assez étroite et que, quelle que soit la position du rouleau sur l'axe des x , le plan vertical passant par cet axe est un plan de symétrie. Nous supposons que les déformations sont planes aux voisinages de ce plan (plan xoz). Ceci permet de ramener le problème à un problème bidimensionnel. Il convient de noter que les capteurs sont placés en dessous de l'axe des x dans tous les essais. Par ailleurs, nous supposons que la force totale appliquée se répartit uniformément sur l'empreinte. Enfin, la longueur de la fosse étant grande, nous négligeons l'influence des bords transversaux. Le problème à étudier peut donc être schématisé par la figure 4.2 dans la mesure où l'on assimile la base de la fosse au massif semi-infini (dans le plan xz).

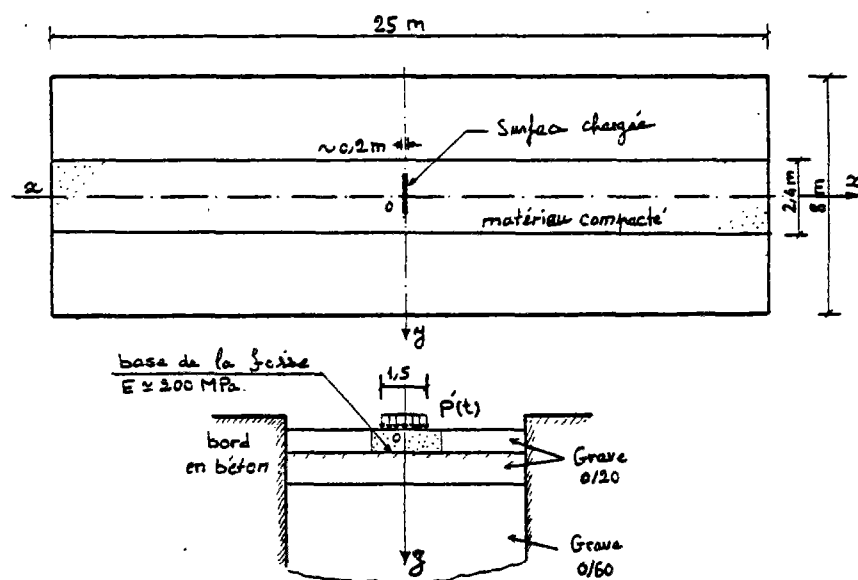


Fig. 4.1 - Plan (a) et coupe transversale de la fosse d'essais (C.E.R.).

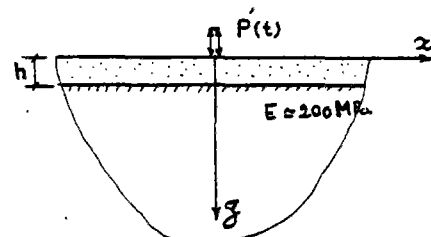


Fig. 4.2 - Schéma de la structure considérée.

Utilisant le groupe 5 du Programme Rosalie, nous avons traité trois problèmes différents :

- 1°) Vu la grande rigidité de la base de la fosse, nous l'avons considérée comme étant infiniment rigide ; les théories de l'élasticité et de la visco-élasticité linéaire ont été essayées. La confrontation des résultats obtenus avec les données expérimentales ont démontré que le modèle choisi n'était pas réaliste. En fait, une partie de l'énergie introduite se propage vers l'infini à travers la base de la fosse, tandis que les bords du modèle discret sont parfaitement réfléchissants.

Cette constatation nous a amené à établir à la suite d'une étude bibliographique, des modèles d'Eléments Finis dont les bords absorbent l'énergie des ondes incidentes, ceci n'étant pas encore essayé au moyen du programme ci-dessus. La méthode retenue est celle des "bords visqueux" de Lysmer et Kuhlemeyer.

- 2°) La propagation des ondes longitudinales dans un "barreau" semi-infini élastique est étudiée à l'aide d'un modèle discret de longueur finie. La charge appliquée est sinusoïdale entretenue ou un seul chargement/déchargement d'une forme arbitraire. La solution numérique s'accorde très bien avec la solution analytique ; autrement dit, l'énergie des ondes longitudinales incidentes est "absorbée" par le bord du modèle discret.
- 3°) La propagation des ondes de volume (ondes longitudinales et transversales planes) et de surface (onde de Rayleigh) dans un semi-espace est étudiée au moyen d'un modèle bidimensionnel. Le semi-espace est sollicité par une charge normale sinusoïdale, répartie uniformément dans un cercle sur la surface du massif. La comparaison des résultats numériques et analytiques indique la bonne coïncidence entre la réponse du massif semi-infini et celle du modèle fini à bords non réfléchissants.

4.1 - RAPPEL SUR LA PROPAGATION DES ONDES ELASTIQUES

4.1.1. Propagation des ondes monodimensionnelles :

a) La figure 4.3. indique une barre de longueur infinie, de section S , de module d'Young E et de masse volumique ρ .

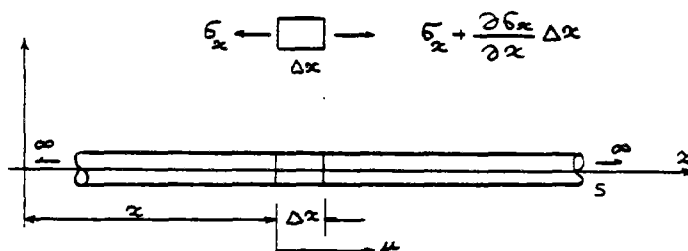


Fig. 4.3 - Vibration longitudinale d'une barre

On suppose que toute section plane reste plane pendant le mouvement et que la contrainte σ_x est répartie uniformément sur l'aire de chaque section.

En l'absence des forces de volumes, l'équation du mouvement monodimensionnel s'obtient de la manière suivante :

- Equation d'équilibre d'un élément de longueur Δx :

$$F = m \gamma$$

$$-\sigma_x S + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Delta x\right) S = \rho \Delta x S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\text{ou encore } \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

- Loi de comportement :

$$\sigma_x = E \epsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.2)$$

D'après les équations 4.1 et 4.2 :

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.3)$$

$$\text{ou encore } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v_c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.4)$$

où, $v_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ représente la vitesse de propagation de l'onde longitudinale dans la barre élastique.

La solution de l'Eq. 4.4., que l'on appelle équation d'ondes, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u = f(V_c t - x) + h(V_c t + x)$$

où : f et h sont des fonctions arbitraires dépendant des conditions initiales ; $f(V_c t - x)$ représente une onde qui se propage dans la direction des S positives à la vitesse V_c , et $h(V_c t + x)$ correspond à une onde qui se propage, avec la même vitesse, dans le sens inverse.

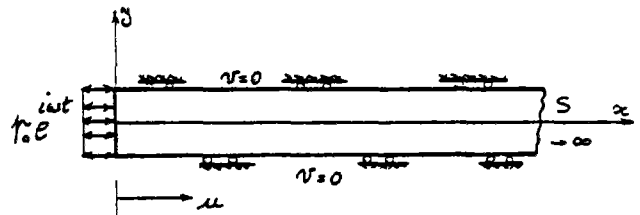
Notons que la vitesse de propagation d'onde, V_c , est différente de la vitesse du mouvement des particules, \dot{u} , dont l'expression après les calculs correspondants est la suivante :

$$\dot{u} = \frac{\sigma_x V_c}{E} = \frac{\alpha_x}{\rho V_c} \quad (4.5)$$

En fait, \dot{u} dépend de la contrainte de sollicitations, tandis que la vitesse de propagation ne dépend que des propriétés du matériau. Ces deux vitesses sont de même signe lorsque σ_x est une contrainte de compression et de signes opposés dans le cas d'une contrainte d'extension.

b) Vibration forcée d'un milieu monodimensionnel semi-infini :

Fig. 4.4 - Schéma d'un milieu "oedométrique" semi-infini soumis à une pression harmonique.



Considérons une barre semi-infinie, sollicitée en son extrémité par une tension harmonique uniforme et perpendiculaire à la section "libre". Cette dernière est unitaire et les caractéristiques du matériau sont E , ν et ρ . Par ailleurs, nous imposons les déplacements latéraux nuls. Les déplacements en tout point du milieu sont calculés de la façon suivante :

Etant donné que les déformations latérales sont imposées nulles, le module du matériau sera le module dit "oedométrique", c'est-à-dire :

$$E_{\text{oed}} = \frac{E (1-\nu)}{(1-2\nu) (1+\nu)} = \frac{G}{s^2} \quad (4.6)$$

avec : G : module de cisaillement

et $s^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$: constante élastique

La vitesse de propagation de l'onde longitudinale dans le milieu monodimensionnel étudié est égale à :

$$V_p = \sqrt{\frac{E_{oed}}{\rho}} = \frac{1}{s} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (4.7)$$

D'après la théorie de l'Elasto-dynamique, les déplacements de tout point sont donnés par la formule suivante :

$$u(x, t) = A \exp i\omega \left(t - \frac{x}{V_p} \right) \quad (4.8)$$

$$\text{d'où } \sigma_x(x, t) = E_{oed} \frac{\partial u}{\partial x} = -i A E_{oed} \frac{\omega}{V_p} \exp i\omega \left(t - \frac{x}{V_p} \right) \quad (4.9)$$

En prenant en compte les conditions aux limites :

$$\sigma_x(0, t) = -P_0 \exp(i\omega t)$$

$$\text{nous avons : } A = \frac{P_0 V_p}{i E_{oed} \omega} = \frac{-is P_0}{\omega \sqrt{G \rho}} \quad (4.10)$$

Par conséquent, le déplacement à l'extrémité (surface libre) sera :

$$u(0, t) = \frac{-is P_0}{\omega \sqrt{G \rho}} \exp(i\omega t) \quad (4.11)$$

On constate que cette équation est la solution de l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur avec amortissement (Fig. 4.5a) :

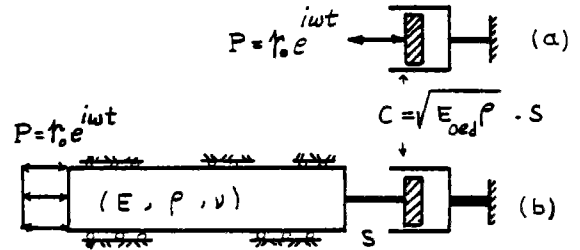
$$-\frac{\sqrt{\rho G}}{s} \ddot{u}(0) = P_0 \exp(i\omega t)$$

$$-C_e \dot{u} = P_0 \exp(i\omega t) : C_e = \sqrt{E_{oed} \rho} \quad (4.12)$$

Autrement dit, pour ce qui est du déplacement de l'extrémité, le milieu monodimensionnel étudié peut être représenté par un amortisseur dont le coefficient d'amortissement est équivalent à l'impédance acoustique du milieu. De la même façon, on peut assimiler le milieu semi-infini ci-dessus à un milieu monodimensionnel fini représenté par la Fig. 4.5 (b) et pour lequel :

$$0 \leq x \leq L, \quad u(x) = \frac{-is P_0}{\omega \sqrt{G \rho}} \exp i\omega \left(t - \frac{x}{V_p} \right) \quad (4.13)$$

Fig. 4.5 - Amortisseur simulant le comportement sous charges harmoniques du milieu "oedométrique" semi-infini élastique.



Ainsi, la dissipation de l'énergie dans le milieu semi-infini peut être prise en compte en remplaçant celui-ci par un amortisseur visqueux absorbant toutes énergies arrivant à l'autre extrémité. Cette analogie présente un intérêt particulier, car elle nous permet d'étudier le comportement d'un milieu monodimensionnel infini utilisant un modèle fini (voir § 4.4), à l'aide des méthodes basées sur la discrétisation dans l'espace telles que la méthode des éléments finis.

Notons que les relations précédentes s'appliquent également à une barre semi-infinie libre de se déformer latéralement, mais en remplaçant le module oedométrique pour le module d'Young E , donc :

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = v_c \quad (4.14)$$

$$\text{d'où} \quad u(x, t) = \frac{-i P_0}{\omega \sqrt{E \rho}} \exp i \omega \left(t - \frac{x}{v_c} \right) \quad (4.15)$$

$$\text{et} \quad c_e = \sqrt{E \rho} \quad (4.16)$$

4.1.2. Propagation des ondes dans un semi-espace élastique :

Considérons un massif semi-infini homogène, isotrope et élastique linéaire défini par les constantes de Lamé (λ et μ) ou E et ν et sa masse volumique ρ . Dans le système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) le semi-espace correspond aux $z > 0$ descendants.

En partant de l'hypothèse de petites déformations et en négligeant les forces de volume, les équations fondamentales de l'élasto-dynamique (Equations de Navier) sont les suivantes :

$$\left[(\lambda + \mu) \text{grad div} + \mu \nabla^2 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{D} = 0 \quad (4.17)$$

avec $\vec{D} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ le vecteur déplacement

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \text{div grad}$$

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

a) Ondes "de volume"

Elles caractérisent le milieu élastique indépendamment de ses limites géométriques : ce sont les "caractéristiques" mathématiques des équations de Navier que doit vérifier le vecteur déplacement d'un point du milieu.

Il est bien connu, d'après le théorème de Helmholtz que tout champ analytique \vec{D} peut être exprimé sous forme :

$$\vec{D} = \text{grad } \phi + \text{rot } \vec{\psi} \quad (4.18)$$

où, ϕ est une fonction scalaire et $\vec{\psi}$ désigne un champ de vecteur ayant une divergence arbitraire.

1. Ondes longitudinales (ondes P)

si $\vec{D} = \text{grad } \phi$, étant donné que $\nabla \text{grad} = \text{grad } \nabla$; on trouve :

$$[(\lambda + 2\mu) \nabla - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}] \text{grad } \phi = 0 \quad (4.19)$$

$$\text{si } \phi = K \text{Exp} \left[\frac{2i\pi}{\lambda} (ux + vy + wz - C_g t) \right] \quad (4.20)$$

$$\text{où } u^2 + v^2 + w^2 = 1, \quad (4.21)$$

on a une onde sinusoïdale plane ; u, v et w sont les cosinus directeurs de la normale au plan d'onde, λ la longueur d'onde, C_g la célérité (vitesse de propagation) ; et d'après l'équation 4.19 il faut que :

$$(\lambda + 2\mu) (u^2 + v^2 + w^2) = \rho C_g^2$$

$$\text{d'où : } C_g = V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (4.22)$$

et comme $\vec{D} = \text{grad } \phi$ est proportionnel à (u, v, w), le déplacement est normal au plan d'onde : définition même d'une onde longitudinale.

2. Ondes transversales (ondes S)

si $\vec{D} = \text{rot } \vec{\psi}$, comme $\text{div rot} = 0$, on a

$$[\mu \nabla - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}] \text{rot } \vec{\psi} = 0 \quad (4.23)$$

$$\text{Prenons : } \vec{D} = (A, B, C) \text{Exp} \left[\frac{2i\pi}{\lambda} (ux + vy + wz - C_r t) \right] \quad (4.24)$$

avec toujours $u^2 + v^2 + w^2 = 0$

comme $\text{div } \vec{D} = 0 = uA + vB + wC$

donc \vec{D} est dans le plan d'ondes : d'où la définition d'onde transversale. Par ailleurs, d'après (4.23)

$$\mu (u^2 + v^2 + w^2) = C_r^2$$

$$\text{d'où : } C_r = V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (4.25)$$

Il existe la relation suivante entre les vitesses de propagation des deux ondes :

$$V_r = \frac{V_s}{s}, \quad (s^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}) \quad (4.26)$$

Le fait remarquable est que, d'après le théorème de Poisson, tout petit mouvement élastique puisse être décrit par la superposition d'ondes longitudinales ou transversales. En utilisant lorsque c'est possible la représentation de Fourier, c'est par les ondes planes sinusoïdales que le mouvement est normalement décrit.

Ce caractère fondamental des deux types d'ondes ci-dessus ne correspond pas aux ondes "de tige", "de plaque", etc. qui décrivent des perturbations complexes. Bien que tout ensemble de deux types d'ondes élastiques "linéairement indépendantes" permet de retrouver, par combinaison, le mouvement décrit par les "caractéristiques", seuls les deux types décrits ci-dessus correspondent aux seules surfaces qui puissent transporter des discontinuités, c'est à dire aux seuls véritables fronts d'ondes.

b) Ondes "de surface" :

Nous nous bornons au cas de l'onde de Rayleigh relative au semi-espace élastique.

Prenons dans le semi-espace élastique le déplacement le plus simple qui, respectant les conditions aux limites ($\sigma_{ij} = 0, z = 0$ et $u_{ij} = 0, z \rightarrow \infty$), soit décrit par des ondes sinusoïdales planes.

Supposons le plan vertical de propagation parallèle à Ox . Suivant l'axe Oz , vertical descendant dans le semi-espace, on ne peut pas avoir de propagation sans perte d'énergie vers z_∞ : d'où la nécessité d'écrire cette onde sous la forme :

$$\text{Exp} \left[\frac{2i\pi}{\lambda} (x - ct) \right] \text{Exp} \left(- \frac{2\pi}{\lambda} pz \right) \quad (4.27)$$

En choisissant :

$$\vec{D} = \text{grad } \phi + \text{rot } \psi \quad (4.28)$$

on est conduit à donner à ϕ la forme :

$$\phi = \frac{\lambda}{2i\pi} \text{Exp} \left[\frac{2i\pi}{\lambda} (x - ct) \right] \text{Exp} \left(- \frac{2\pi}{\lambda} pz \right) \quad (4.29)$$

et à rot $\vec{\psi}$ la forme

$$\text{rot } \vec{\psi} = (sA, 0, iA) \exp \left[\frac{2i\pi}{\ell} (x - ct) \right] \exp \left(- \frac{2\pi}{\ell} p z \right) \quad (4.30)$$

(p et s étant des paramètres à déterminer).

D'après les Equations 4.19 et 4.23 on a donc :

$$(\lambda + 2\mu) (1 - p^2) = \rho c^2 \rightarrow p = \left(1 - \frac{c^2}{v^2} \right)^{1/2} \quad (4.31)$$

$$\mu (1 - s^2) = \rho c^2 \rightarrow s = \left(1 - \frac{c^2}{v_s^2} \right)^{1/2} \quad (4.32)$$

On calcule alors \vec{D} à partir des Equations 4.29 et 4.30 et on détermine la contrainte \vec{H} sur un élément horizontal par l'équation :

$$\vec{H} = \lambda \text{ div } \vec{D} \delta_{zj} + \mu (D_{z,j} + D_{j,z}) \quad (4.33)$$

avec $j = (x, z)$
 $\delta_{zj} = 0$ si $z \neq j$
 $= 1$ si $z = j$

Lorsque $z = 0$, \vec{H} est une fonction sinusoïdale de x dont l'amplitude ne sera nulle que si A et B vérifient le système homogène obtenu en écrivant que les composantes de \vec{H} suivant ox et oz sont nulles. Pour cela, il faut annuler le déterminant (d'ordre 2) de ce système ; d'où la condition de Rayleigh

$$4ps - (1 + s^2)^2 = 0 \quad (4.34)$$

En substituant les relations 4.31 et 4.32 dans cette équation on obtient la célérité de l'onde de Rayleigh (ou célérité de Rayleigh) qui varie légèrement avec v (Fig. 4.6) :

$$C = v_R = 0,9 \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (4.35)$$

Notons que $\frac{D_z}{D_x}$ est imaginaire pur, l'angle de déphasage entre les deux déplacements étant de $\frac{\pi}{2}$ (mouvement elliptique).

L'onde de Rayleigh ressemble à celle qui se propage à la surface de l'eau sauf en ce qui concerne la direction du mouvement des particules. Dans les ondes de Rayleigh, une particule donnée du massif parcourt un chemin elliptique dont le grand axe est perpendiculaire à la surface ; son sens de rotation est tel que la particule se déplace vers la source d'émission lorsqu'elle est au sommet du chemin elliptique.

L'amplitude de ces ondes s'atténue exponentiellement avec la profondeur. Par ailleurs, comme on le voit sur la Fig. 4.6, les déplacements maximums se trouvent à une profondeur plus grande lorsque la longueur d'onde est plus élevée.

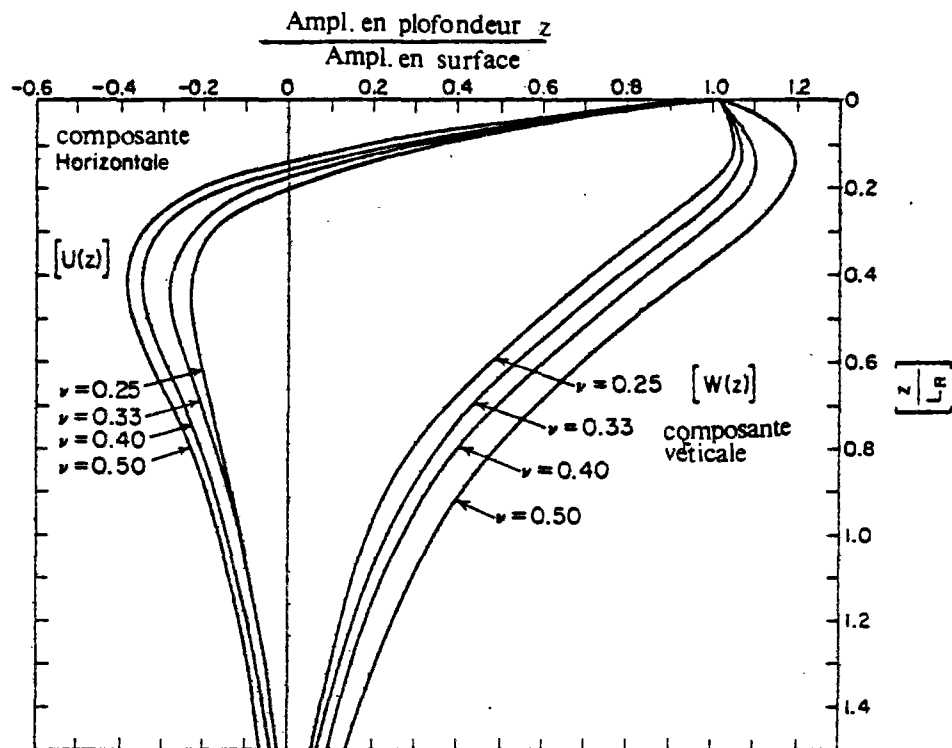


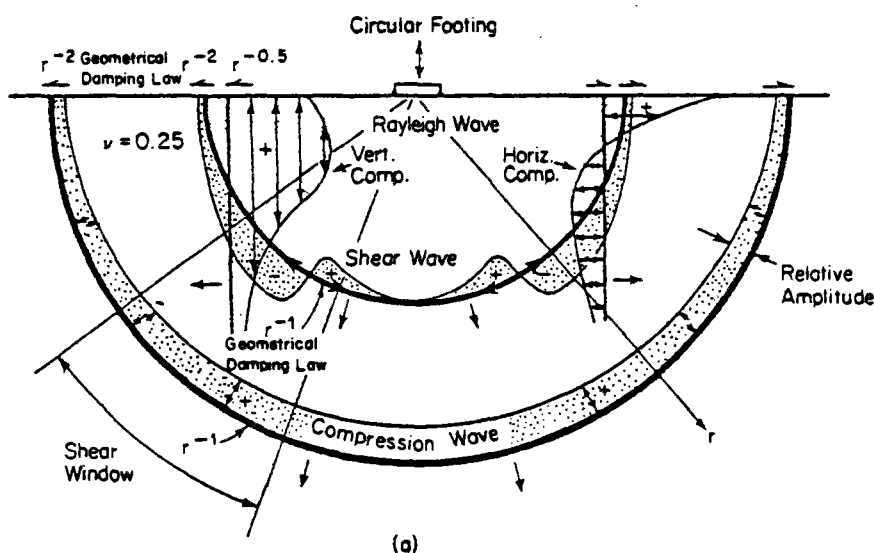
Fig. 4.6 - Variation du rapport des amplitudes en fonction de la profondeur pour les ondes de Rayleigh.

c) Semi-espace élastique soumis en surface à une sollicitation harmonique :

En ce qui concerne la vibration forcée d'un semi-espace élastique nous nous bornons à rapporter [75] brièvement l'aspect particulier relatif à la répartition de l'énergie rayonnée dans le massif en raison de la propagation des ondes décrites ci-dessus.

Considérons une fondations circulaire vibrant sur la surface d'un semi-espace élastique. L'énergie transmise dans le massif est rayonnée loin de la fondation par la propagation de l'ensemble des ondes P, s et de Rayleigh (R).

La répartition de l'énergie rayonnée séparément par chaque onde dans un semi-espace élastique ($\nu = 0,33$) est indiquée sur la Fig. 4.7 (a). Les ondes de volume se propagent, en s'éloignant de la source oscillante, suivant des front demi-sphériques. On peut démontrer [90] que l'amplitude des ondes P et s décroît avec le rapport $\frac{1}{r}$ (r étant la distance de la source) sauf sur la surface du milieu où la décroissance est proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$. L'amplitude des ondes de Rayleigh décroît avec $\frac{1}{\sqrt{r}}$.



(a)

Wave Type	Per Cent of Total Energy
Rayleigh	67
Shear	26
Compression	7

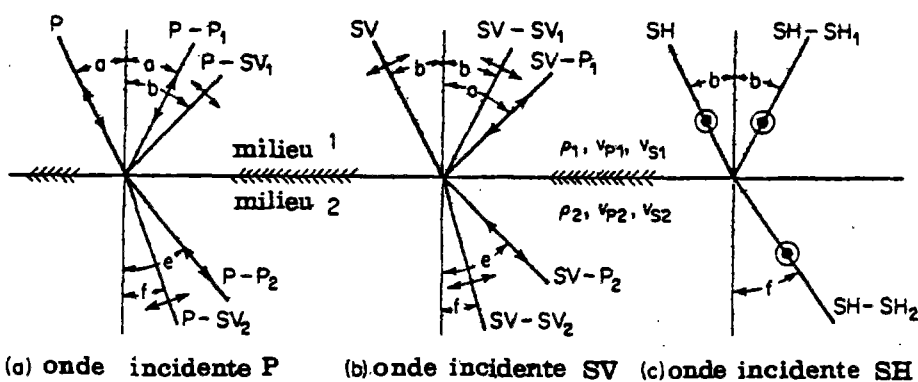
(b)

Fig.4.7-Rayonnement des ondes de déplacement dans un semi-espace élastique surmonté d'une fondation circulaire ; (d'après Woods - Cité dans [75]).

Quant à la répartition de l'énergie transmise par chaque onde, Miller et Pursey (1955) [64] ont trouvé que (Fig. 4.7 (b)) 67 % de l'énergie se dissipe sous forme d'ondes de surface, 26 % en ondes transversales et 7 % en ondes longitudinales. La prépondérance des ondes de Rayleigh est donc très nette.

4.1.3. Propagation des Ondes Élastiques dans un Milieu Stratifié.

Les réflexions et réfractions des ondes de volume à l'interface de deux couches élastiques, homogènes et isotropes sont indiquées sur la Fig. 4.8.



$$\frac{\sin a}{v_{P1}} = \frac{\sin b}{v_{S1}} = \frac{\sin e}{v_{P2}} = \frac{\sin f}{v_{S2}}$$

Fig. 4.8 - Réflexions et réfractions des ondes de volume à l'interface de deux couches élastiques.

Sur cette figure :

P sont des ondes longitudinales.

SV sont des ondes transversales à mouvement dans un plan perpendiculaire à l'interface.

SH sont des ondes transversales à mouvement dans un plan parallèle à l'interface.

D'après le théorème de Snell :

$$\frac{\sin a}{v_{p1}} = \frac{\sin b}{v_{s1}} = \frac{\sin e}{v_{p2}} = \frac{\sin f}{v_{s2}} \quad (4.36)$$

En s'appuyant sur la théorie de l'élasticité, Zoeppritz (1919)[99] a déterminé la nature de ces ondes, réfléchies et réfractées, ainsi que la distribution de l'énergie entre elles.

L'énergie transmise par une onde étant proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde, Zoeppritz a exprimé les rapports de l'amplitude de l'onde réfléchi ou réfractée avec celle de l'onde incidente. Ces rapports ne dépendent que :

- de l'angle d'incidence ;
- du rapport des vitesses des ondes dans les deux milieux ;
- du rapport des masses volumiques des deux milieux.

Pour deux milieux donnés, on observe l'existence d'un maximum et d'un minimum des rapports des amplitudes des ondes résultantes qui dépendent de l'angle d'incidence.

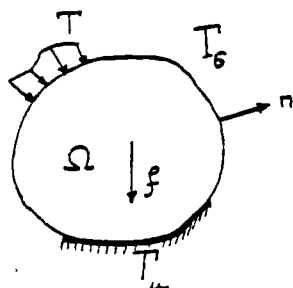
Si la vitesse de l'onde réfléchi ou réfractée est supérieure à celle de l'onde incidente, il existe un angle critique à l'incidence tel que, l'angle de réflexion ou de réfraction a une valeur de 90°. Pour des angles supérieures à l'angle critique, aucune énergie n'est transmise du milieu 1 au milieu 2.

4.2 - RAPPEL SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS EN ELASTO-DYNAMIQUE.

4.2.1. Position du problème :

Soit un domaine Ω de frontière Γ soumis à des forces de volume $f(x,t)$ et de surface $T(x,t)$ sur une partie Γ_6 de Γ . On cherche à déterminer à tout moment l'état élastique de ce milieu satisfaisant aux conditions aux limites et aux conditions initiales.

Fig. 4.9



On a :

- Equations d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.37)$$

- Loi de comportement (petites déformations) :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (4.38)$$

où :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.39)$$

- Conditions aux limites :

Déplacements imposés : $u(x, t) = 0$ sur r_u (4.40)

Contraintes imposées : $\sigma_{ij}(x, t) n_j = T_i$ sur r_σ

- Conditions initiales :

On supposera par exemple qu'elles sont nulles :

Déplacements : $u(x, 0) = 0$

Vitesses : $\dot{u}(x, 0) = 0$

Ceci conserve toute la généralité du problème.

En introduisant la loi de comportement dans les équations d'équilibre on obtient les équations de Navier :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (4.41)$$

La méthode de résolution consiste à :

- transformer les équations de Navier en une forme variationnelle qui tienne compte des conditions aux limites et des conditions initiales ;
- résoudre l'équation variationnelle obtenue au moyen d'une discrétisation dans l'espace. (Fremond (1980) [34]).

Soit $V(x)$ un champ de déplacements virtuels sinématiquement admissible. On multiplie l'Equation 4.37 par $V_i(x)$ et on intègre sur Ω :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} V_i \, dx + \int_{\Omega} f_i V_i \, dx = \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i v_i \, dx \quad (4.42)$$

On intègre par partie le premier terme de cette équation à l'aide du théorème de Gauss :

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx + \int_{\Gamma} \sigma_{ij}(u) n_j v_i dx + \int_{\Omega} f_i v_i dx = \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i v_i dx \quad (4.43)$$

On introduit les conditions aux limites :

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx + \int_{\Gamma_{\sigma}} T_i v_i dx + \int_{\Omega} f_i v_i dx = \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i v_i dx \quad (4.44)$$

On peut vérifier par ailleurs que :

$$\sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v)$$

d'où :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i v_i dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx - \int_{\Omega} f_i v_i dx - \int_{\Gamma_{\sigma}} T_i v_i dx = 0 \quad (4.45)$$

Enfin, on prend en compte la loi de comportement :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i v_i dx + \int_{\Omega} [\lambda \varepsilon_{kk}(u) \varepsilon_{kk}(v) + 2 \mu \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v)] dx \\ - \int_{\Omega} f_i v_i dx - \int_{\Gamma_{\sigma}} T_i v_i dx = 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Cette équation constitue la formulation variationnelle des équations de Navier. Elle est équivalente à l'expression du théorème du travail virtuel en élasto-dynamique. Le premier terme de l'Equation 4.46 désigne le travail virtuel des forces d'inertie, le deuxième celui des forces élastiques internes et enfin les troisième et quatrième représentent le travail virtuel des forces extérieures. L'avantage de l'Equation 4.46 par rapport à l'Equation 4.41 est que les différentiations sont en partie reportées sur les déplacements virtuels.

La discrétisation dans l'espace de Ω par la méthode des éléments finis abouti à la résolution de l'équation matricielle suivante :

$$M\ddot{U} + RU = F \quad (4.47)$$

dans laquelle U est le vecteur des déplacements aux points (noeuds) du modèle discret, F le vecteur des forces extérieures et M et R sont respectivement la matrice de masse et la matrice de rigidité.

4.2.2. Cas du solide visco-élastique de Kelvin-Voigt :

La loi de comportement de ce matériau s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^v \quad (4.48)$$

$$\text{avec : } \sigma_{ij}^e = \lambda^e \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu^e \epsilon_{ij} \quad (4.49)$$

pour la partie élastique, et :

$$\sigma_{ij}^v = \lambda^v \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu^v \epsilon_{ij} \quad (4.50)$$

pour la partie visqueuse, où ϵ désigne la vitesse de déformation. La formulation variationnelle s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i v_i \, dx + \int_{\Omega} [\lambda^e \epsilon_{kk}(u) \epsilon_{kk}(v) \, dx + 2 \mu^e \epsilon_{ij}(u) \epsilon_{ij}(v)] \, dx \\ & + \int_{\Omega} [\lambda^v \dot{\epsilon}_{kk}(u) \epsilon_{kk}(v) + 2 \mu^v \dot{\epsilon}_{ij}(u) \epsilon_{ij}(v)] \, dx - \int_{\Omega} f_i v_i \, dx \\ & - \int_{\Gamma_{\sigma}} T_i v_i \, dx = 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

La discrétisation par éléments finis donne le système linéaire :

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + RU = F \quad (4.52)$$

où, C (matrice d'amortissement) et R ont la même structure. Cependant, ces deux matrices ne sont pas nécessairement proportionnelles. C'est seulement dans le cas où on aurait :

$$\lambda^v = \alpha \lambda^e \quad \text{et} \quad \mu^v = \alpha \mu^e$$

qu'on obtient :

$$C = \alpha R$$

L'hypothèse de l'amortissement de Rayleigh, qui est appliquée dans le groupe 5 du programme Rosalie consiste à écrire :

$$C = \alpha R + \beta M$$

Elle ne permet de représenter un matériau visco-élastique que dans des cas très particuliers. Notons enfin que $\alpha = 0$ et $C = \beta M$ donne un amortissement proportionnel à la vitesse de déplacement et non à la vitesse de déformation. Ce cas peut représenter les forces exercées par un fluide visqueux au sein d'un milieu poreux.

4.2.3. Méthode de Résolution :

En ce qui concerne les massifs élastiques, la résolution du système 4.52 se fait, par le programme Rosalie, au moyen de l'intégration directe, c'est-à-dire l'intégration pas-à-pas dans l'espace du temps. Parmi différentes méthodes d'intégration pas-à-pas telles que les méthodes des différences centrées, de Wilson, de Houblot, de Newmark, etc. , c'est la méthode de Newmark qui a été appliquée. Il s'agit d'une version modifiée des méthodes d'"accélération linéaire" assurant une meilleure stabilité et exactitude des solutions par rapport aux autres procédés:

On suppose que sur un petit interval de temps, Δt , l'accélération en tout point du milieu varie linéairement, ceci correspond aux distributions parabolique de la vitesse et cubique du déplacement sur Δt :

$$\dot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + \Delta t \ddot{u}(t + \lambda \Delta t) \quad 0 < \lambda < 1$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t \dot{u}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}(t + \gamma \Delta t) \quad 0 < \gamma < 1$$

L'accélération étant linéaire sur Δt , on a :

$$\ddot{u}(t + \lambda \Delta t) = (1 - \delta) \ddot{u}(t) + \delta \ddot{u}(t + \Delta t) \quad 0 < \delta < 1$$

$$\ddot{u}(t + \gamma \Delta t) = (1 - 2\alpha) \ddot{u}(t) + 2\alpha \ddot{u}(t + \Delta t) \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}$$

Donc :

$$\dot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + \Delta t [(1 - \delta) \ddot{u}(t) + \delta \ddot{u}(t + \Delta t)]$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t \dot{u}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\alpha) \ddot{u}(t) + 2\alpha \ddot{u}(t + \Delta t)]$$

A partir des deux équations ci-dessus on obtient $\ddot{u}(t + \Delta t)$ et $\dot{u}(t + \Delta t)$ en fonction de $u(t)$, $\dot{u}(t)$, $\ddot{u}(t)$ et $u(t + \Delta t)$:

$$\ddot{u}(t + \Delta t) = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} u(t + \Delta t) - \frac{1}{\alpha \Delta t^2} u(t) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{u}(t) - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \ddot{u}(t) \quad (4.53)$$

$$\dot{u}(t + \Delta t) = \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) \dot{u}(t) + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} u(t + \Delta t) - \frac{\delta}{\alpha \Delta t} u(t) + \Delta t \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right) \ddot{u}(t) \quad (4.54)$$

Si l'on substitue les équations 4.53 et 4.54 dans l'équation matricielle de l'équilibre correspondant au moment $t + \Delta t$, c'est-à-dire dans :

$$M \ddot{U}_{t + \Delta t} + C \dot{U}_{t + \Delta t} + R U_{t + \Delta t} = F_{t + \Delta t}$$

On aura :

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} M + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} C + R \right] U_{t + \Delta t} = F_{t + \Delta t} + \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} M + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \right] U_t \\ + \left[\frac{1}{\alpha \Delta t} M + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) C \right] \dot{U}_t + \left[\left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) M + \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1 \right) \Delta t C \right] \ddot{U}_t \end{aligned} \quad (4.55)$$

Connaissant les déplacements, vitesses et accélérations au temps t , l'équation 4.54 permet de déterminer les déplacements correspondant au temps $t + \Delta t$ (et par là les vitesses et les accélérations).

Ainsi, la détermination de l'état élastique à un moment t , se fait, à partir des conditions initiales $(U_{t_0}, \dot{U}_{t_0}, \ddot{U}_{t_0})$ et suivant des intégrations successives dont le nombre est inversement proportionnel à Δt

choisi : $N = \frac{t_n - t_0}{\Delta t}$.

En ce qui concerne les paramètres α et δ , il a été constaté [27] que la méthode de Newmark est inconditionnellement stable, c'est-à-dire que les déplacements calculés ne deviennent pas infiniment grands, quelle que soit la grandeur du pas de temps utilisé, si $\delta \geq 0,5$ et $\alpha \geq 0,25 (\delta + 0,5)^2$. Dans le programme Rosalie, $\delta = 0,5$ et $\alpha = 0,25$; selon des études antérieures [9], ces valeurs permettent d'obtenir les solutions les plus exactes.

Choix de l'incrément de temps :

Le modèle discrétisé ayant un nombre fini de modes propres, théoriquement le pas de temps choisi doit être suffisamment petit vis-à-vis de la période la plus courte du système (T_n), à savoir $\frac{\Delta t}{T_n} = \frac{1}{10}$.

Ceci conduit à un nombre très grand d'intégrations alors que l'influence des derniers modes sur la réponse du système est en pratique négligeable. Il est donc admissible, dans une analyse modale de choisir $\Delta t = \frac{T_n}{10}$, T_n étant la période correspondant au dernier mode dont on tient compte dans le calcul.

Quant au phénomène de propagation des ondes élastiques dans les massifs, il a été constaté que les solutions sont suffisamment exactes lorsque l'incrément de temps est inférieur à une valeur qui dépend, d'une part de la finesse du modèle discret et, d'autre part, des vitesses de propagation des ondes élastiques dans le milieu considéré :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta l}{V} \quad (4.56)$$

où, Δl est la distance entre les deux points les plus proches du modèle discret et V la célérité la plus élevée des ondes se propageant dans le milieu réel.

Notons qu'au cas où les sollicitations sont "brutales" (sollicitations du type "choc" par exemple) ; il faut choisir un incrément de temps encore plus petit ($\approx 0,5 \Delta z/v$) pour que l'hypothèse de l'"accélération linéaire" sur Δt soit respectée.

On remarque par ailleurs que le coût final d'un calcul dépend d'une part du nombre des éléments et, d'autre part, de leur taille. Or, pour ce qui est de la propagation des ondes élastiques, il a été constaté - [50] [58] - que la solution n'est correcte que si le côté le plus grand des éléments est inférieur à 1/12ème de la plus petite longueur d'onde correspondant au milieu étudié ; par conséquent, c'est la grandeur du modèle discret qui gouverne le temps du calcul numérique.

Ceci constitue en effet le point faible de la méthode des éléments finis en ce qui concerne ses applications dans la dynamique des milieux semi-infinis, car d'une part la réflexion aux limites de l'énergie dans le modèle numérique peut influencer notablement la réponse du système étudié et, d'autre part, si l'on assimile le milieu semi-infini à un modèle suffisamment grand pour qu'on obtienne la solution souhaitée avant que les réflexions aient lieu (ou que l'énergie réfléchie soit négligeable à cause de l'amortissement interne), le temps de calcul croît nettement en raison des considérations précédentes.

C'est pourquoi des recherches ont été entreprises depuis plusieurs années pour élaborer des modèles numériques dont les limites sont non réfléchissantes : s'inspirant du modèle monodimensionnel semi-infini (§ 4.1.1.(b)) Lysmer et Kuhlemeyer (1969) [58] ont proposé une méthode originale pour les problèmes plans qui consiste à appliquer des éléments amortisseurs aux frontières du modèle discret choisi. Les coefficients d'amortissement de ces éléments sont des constantes pour ce qui est de l'absorption des ondes de volume ; ils dépendent de la profondeur et de la fréquence de vibration dans le cas de l'onde de Rayleigh, White et al (1977) [96] ont développé la méthode ci-dessus en évaluant la variation des coefficients d'amortissement, supposés constants par Lysmer et Kuhlemeyer, en fonction du coefficient de Poisson ; mais le gain de l'efficacité ainsi obtenue ne dépasse pas 1 %.

Lysmer et Waas (1972) [59] et Waas (1972) [92] ont élaboré une autre méthode adaptée aux résolutions par les variables complexes qui consiste à déterminer par une technique analytique, la réponse des zones extérieures au modèle et de la coupler avec les éléments aux limites du modèle discret.

Une troisième méthode est proposée par Smith (1974) [83] dans laquelle il élimine les réflexions sur les bords par des superpositions qui satisfont les conditions aux limites de Dirichlet et Neumann. Cette méthode est applicable aux cas de chargements transitoires au moyen de l'intégration pas-à-pas, mais elle nécessite un temps de calcul important. Une autre méthode similaire à celle de Smith a été élaborée par Cundall et al (1978) [23] et développée par Kunar et Rodriguez-Ovejero (1980) [50] qui vise plutôt l'interaction sol-structure lors de séismes.

Utilisant la méthode de Lysmer et Kuhlemeyer, Tassas (1979) [85] étudie l'interaction sol - fondation dans le cas des charges harmoniques et du type "choc" ; le calcul se fait par l'intégration dans le temps.

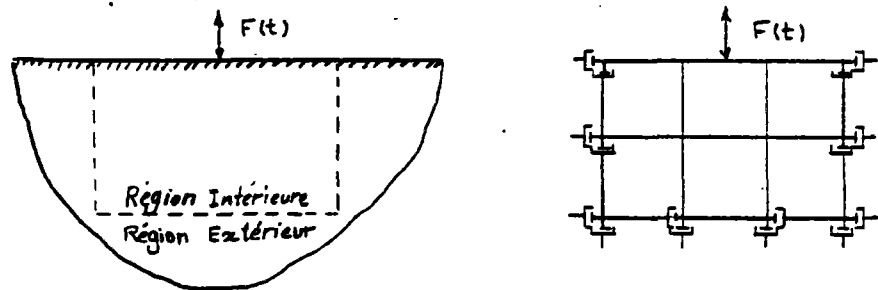
Notons enfin que les "frontières visqueuses" proposées par Lysmer et Kuhlemeyer s'appliqueraient également aux cas de l'élasticité non linéaire. Par ailleurs, elles sont applicables aussi bien dans les programmes de calcul à valeurs propres que dans ceux à intégration pas-à-pas.

4.3.- METHODE DES "BORDS A AMORTISSEURS VISQUEUX"

Lysmer et Kuhlmeyer (1969)[58] ont proposé une méthode générale grâce à laquelle un milieu infini peut être approché par un milieu fini en introduisant des amortisseurs visqueux aux frontières du modèles :

La fig. 4.10 schématise un milieu semi-infini. On suppose que toutes les sources de sollicitations et les zones d'irrégularités géométriques sont comprises à l'intérieur d'une limite convexe imaginaire. La propagation d'énergie aura lieu, uniquement de l'intérieur vers l'extérieur et toute énergie arrivant à la frontière passera dans la région extérieure. L'effet de la région extérieure sur celle de l'intérieur sera donc identique à celui d'une limite qui absorbe l'énergie arrivée (limite non réfléchissante). Cette observation conduit directement à l'idée de déterminer la réponse dynamique de la région intérieure d'un modèle fini soumis à des conditions aux limites qui absorbent toute l'énergie arrivée.

Fig. 4.10 - Modélisation du massif semi-infini.



Les auteurs ont étudié plusieurs possibilités pour exprimer analytiquement ces conditions aux limites et ont proposé les relations suivantes :

$$\sigma = a \rho V_p \dot{w} \quad (4.57)$$

$$\tau = b \rho V_s \dot{u} \quad (4.58)$$

avec

- σ : contrainte normale sur la surface de limite ;
- τ : contrainte de cisaillement sur la surface de limite ;
- ρ : masse volumique ;
- \dot{w} et \dot{u} : vitesses de déplacements normaux et tangentiels des particules ;
- V_p : vitesse de propagation de l'onde longitudinale ;
- V_s : vitesse de propagation de l'onde transversale ;
- a, b : paramètres sans dimension.

Les conditions aux limites proposées correspondent à une situation dans laquelle le bord convexe serait "supporté" par des amortisseurs infinitésimaux orientés vers la normale et la tangente à la surface limite.

Afin de déterminer les valeurs à donner aux paramètres a et b , il est indispensable d'étudier la réflexion des ondes élastiques à la frontière définie par les équations 4.57 et 4.58. La méthode choisie est celle utilisée par Ewing, Jardetzky et Press (1957)[30] pour la réflexion et réfraction des ondes élastiques planes à l'interface de deux milieux.

a) Ondes incidentes longitudinales

Le cas d'une onde longitudinale incidente est indiqué par la figure 4.11. L'axe des x représente la limite visqueuse et le milieu élastique se situe dans le demi-plan inférieur. L'onde incidente engendre deux ondes réfléchies : une onde transversale de célérité :

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

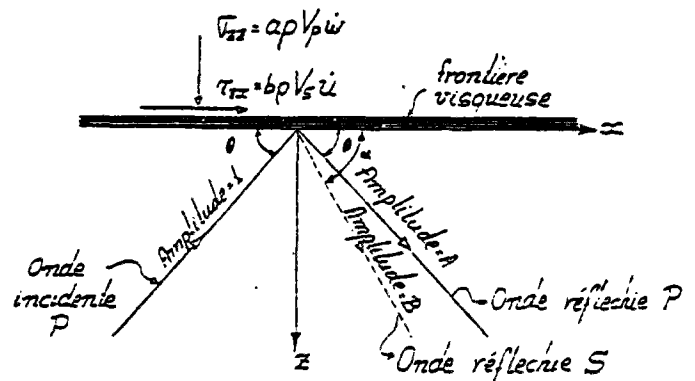
et une onde longitudinale de célérité

$$v_p = \frac{1}{s} v_s$$

où, s est une constante élastique définie à partir du coefficient de Poisson :

$$s^2 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}$$

Fig. 4.11 - Réflexion au bord visqueux de l'onde incidente longitudinale.



Les directions des ondes incidentes et réfléchies sont liées suivant la loi de Snell :

$$\cos \alpha = s \cdot \cos \theta \quad (4.59)$$

et la vitesse du front d'onde le long de l'axe des x est :

$$c = v_p \cdot \sec \theta$$

Les déplacements horizontaux et verticaux sont exprimés en termes de potentiels de déplacement :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (4.60)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.61)$$

où, $\phi = \phi(x, z, t)$ et $\psi = \psi(x, z, t)$ représentent respectivement les déplacements dus aux ondes P et aux ondes S.

Puisque la vitesse du front d'onde pour les trois ondes de la Fig. 4.11 doit être la même le long de l'axe des x, on trouve les formes suivantes pour les potentiels de déplacement si les ondes sont harmoniques de pulsation ω :

$$\phi = \text{Exp}[ik(ct + z \tan \theta - x)] + A \text{Exp}[ik(ct - z \tan \theta - x)] : \quad (4.62)$$

onde P incidente onde P réfléchiée

$$\psi = B \text{Exp}[ik(ct - z \tan \alpha - x)] \quad (4.63)$$

dans lesquelles k est le nombre d'ondes :

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4.64)$$

et A et B sont les amplitudes inconnues des ondes réfléchies.

Ces amplitudes peuvent être déterminées à partir des conditions aux limites définies par les équations 4.57 et 4.58, celles-ci étant exprimées en termes de potentiels de déplacement :

$$\sigma = a \rho V_p \dot{w} \rightarrow \frac{1-2s^2}{s^2} \nabla^2 \phi + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = \frac{a}{sV_s} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

$$\tau = b \rho V_s \dot{u} \rightarrow 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = \frac{b}{V_s} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$$

La substitution des équations 4.62 et 4.63 et dans les équations ci-dessus conduit aux deux équations linéaires suivantes :

$$(1 - 2s^2 \cos^2 \theta + a \sin \theta) A + (\sin 2\alpha + a \cos \theta) B = 2s^2 \cos^2 \theta - 1 + a \sin \theta, \quad (4.65)$$

$$(b \cos \alpha + s^2 \sin 2\theta) A + (\cos 2\alpha - b \sin \alpha) B = s^2 \sin 2\theta - b \cos \alpha, \quad (4.66)$$

qui permettent de déterminer les amplitudes A et B en fonction de l'angle d'incidence θ .

b) Ondes incidentes transversales

Le cas d'une onde transversale incidente, indiqué dans la fig. 4.12 se résout de la manière précédente. Les potentiels de déplacement correspondant sont :

$$\phi = A \exp [ik (ct + z \operatorname{tg} \theta - x)] \quad (4.67)$$

onde P réfléchie

$$\psi = \text{Exp} [ik (ct + z \operatorname{tg} \alpha - x)] + B \text{Exp} [ik (ct - z \operatorname{tg} \alpha - x)] \quad (4.68)$$

onde S incidente onde S réfléchie

et les équations linéaires donnant les paramètres A et B correspondant :

$$(s^2 \sin 2\theta + b \cos \alpha) A + (\cos 2\alpha - b \sin \alpha) B = -\cos 2\alpha - b \sin \alpha \quad (4.69)$$

$$(-\cos 2\alpha + a \sin \theta) A + (\sin 2\alpha + a \cos \theta) B = \sin 2\alpha - a \cos \theta \quad (4.70)$$

Un cas particulier peut se produire lorsque l'angle d'incidence α devient inférieur à l'angle critique défini par

$$\cos \alpha_{cr} = s \quad (4.71)$$

Dans ce cas l'équation 4.59 donne :

$$\cos \theta = \frac{\cos \alpha}{S} > 1$$

$$\sin \theta = -i \sqrt{\cos^2 \theta - 1} \text{ (imaginaire).}$$

Par conséquent, la résolution des équations 4.69 et 4.70 donne des valeurs imaginaires

$A = A_1 + iA_2$, $B = B_1 + iB_2$, pour l'amplitude de deux ondes réfléchies. La signification physique d'amplitudes complexes est qu'il n'existe pas d'ondes réfléchies mais en revanche, il apparaît une sorte d'onde de Rayleigh, dite onde d'interface. Cette onde s'avance le long de l'interface avec une amplitude qui décroît exponentiellement en fonction de la distance de l'interface.

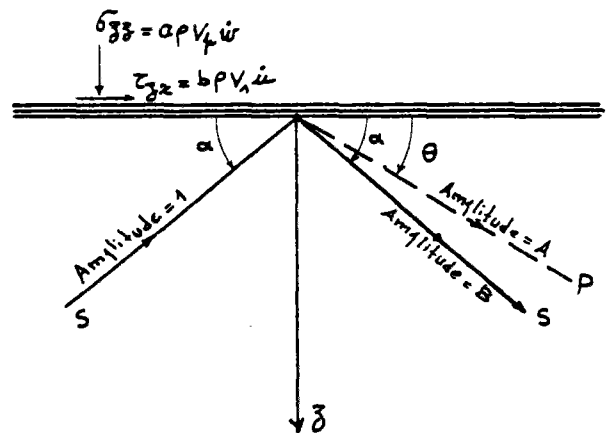
Pour déterminer les valeurs à donner aux paramètres a et b , les auteurs définissent l'efficacité du bord visqueux à l'aide du rapport entre l'énergie réfléchie et l'énergie incidente. D'après la théorie élémentaire des ondes, l'énergie transmise, par unité de temps et de surface, par une onde longitudinale d'amplitude A est égale à :

$$W_p = \frac{1}{2S} \rho V_s \omega^2 A^2 \quad (4.73)$$

De même, pour une onde transversale d'amplitude B :

$$W_s = \frac{1}{2} \rho V_s \omega^2 B^2 \quad (4.74)$$

Fig. 4.12 - Réflexion au bord visqueux de l'onde incidente transversale.

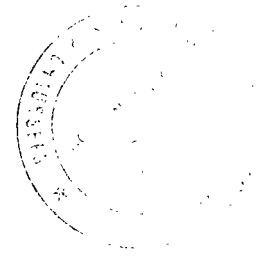


La surface du front d'onde correspondant à l'onde P (Fig. 4.13) est $\sin \theta$ et l'amplitude de cette onde est égale à l'unité. Par conséquent, l'énergie incidente est :

$$E_i = \frac{1}{2S} \rho V_s \omega^2 \sin \theta \quad (4.75)$$

De la même façon on trouve l'énergie réfléchie :

$$E_r = \frac{1}{2S} \rho V_s \omega^2 A^2 \sin \theta + \frac{1}{2} \rho V_s \omega^2 \sin \alpha \quad (4.76)$$



Le rapport entre les énergies réfléchie et incidente devient alors :

$$m = \frac{E_r}{E_i} = A^2 + s \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} B^2 \quad (4.77)$$

On constate que pour a et b donnés, le rapport m dépend seulement de l'angle d'incidence θ et du coefficient de Poisson ν . La variation de m avec l'angle θ pour $\nu = 0.25$ est tracée sur la Fig. 4.14. D'autres valeurs de ν donneraient des résultats analogues. D'après la Fig. 4.14, la valeur de $m = 1$ correspond à la réflexion parfaite tandis que pour $m = 0$ on a une absorption complète. On peut voir par ailleurs que $a = b = 1$ semble conduire à un choix optimal. Quelles que soient les valeurs données à a et b , l'absorption ne peut pas être parfaite sur toute la gamme des angles incidents. La Fig. 4.14 indique une absorption presque parfaite pour $\theta > 30^\circ$ lorsque $a = b = 1$; mais il y a réflexion pour $\theta < 30^\circ$. Or, comme on le voit sur la Fig. 4.13, l'énergie arrivée à l'unité de surface est proportionnelle à $\sin \theta$, par conséquent la valeur de l'énergie réfléchie dans le domaine des $\theta < 30^\circ$ n'est qu'une petite partie de l'énergie totale. En conclusion, la moyenne sur $\theta = 0^\circ$ à $\theta = 90^\circ$ de $(E_r/E_i) \sin \theta$ sera une bonne indication pour l'efficacité globale des bords visqueux. Selon cette définition, l'efficacité d'absorption des ondes longitudinales du bord visqueux correspondant à $a = b = 1$ est de 98,5%.

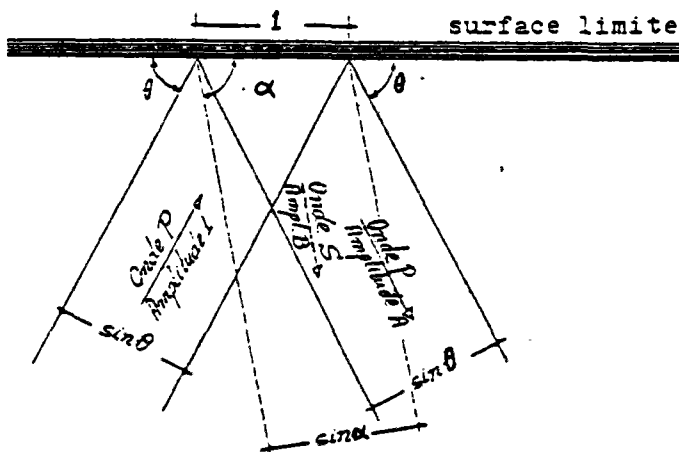


Fig. 4.13 - Onde incidente longitudinale.

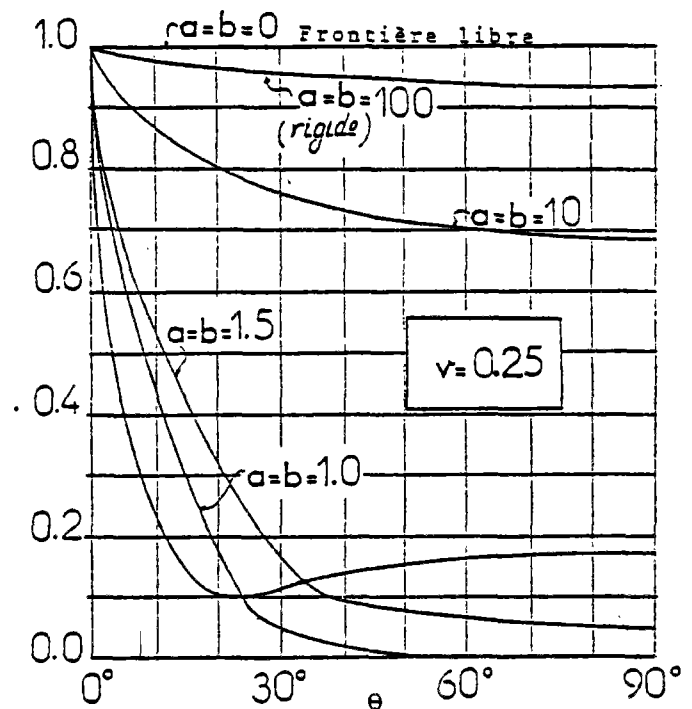


Fig. 4.14- Variation du rapport d'énergies en fonction de l'angle d'incidence de l'onde longitudinale.

En ce qui concerne l'absorption de l'onde incidente transversale, on obtient :

$$m = \frac{E_r}{E_i} = B^2 + \frac{1}{s} \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} A^2 \quad \text{pour } \alpha \geq \alpha_{cr} \quad (4.78)$$

$$\text{et : } m = B_1^2 + B_2^2 \quad \text{pour } \alpha < \alpha_{cr} \quad (4.79)$$

Pour $a = b = 1$ et $\nu = 0,25$, le bord visqueux absorbe 95 % de l'énergie transmise par les ondes S incidentes ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Notons que le rapport m ne tient pas compte de l'onde d'interface car celle-ci ne transmet aucune énergie. Toutefois l'existence de l'onde d'interface peut engendrer certaines irrégularités dont l'importance diminue avec l'augmentation de la fréquence ou l'accroissement de la longueur du bord considéré.

En résumé, Lysmer et Kuhlmeyer démontrent que la frontière visqueuse définie par :

$$\sigma = \rho V_f \dot{w} \quad (4.80)$$

$$\tau = \rho V_s \dot{u} \quad (4.81)$$

absorbe presque la totalité de l'énergie des ondes longitudinales et transversales harmoniques. En outre, puisque les valeurs ci-dessus sont indépendantes de la fréquence de vibration, cette frontière pourra absorber également les ondes non harmoniques.

c) Ondes de Rayleigh

La frontière définie par l'absorption de l'énergie des ondes de Rayleigh en régime stationnaire est similaire à la frontière standard avec la différence que dans le cas des ondes de Rayleigh, a et b varient en fonction de la profondeur.

Considérons une onde de Rayleigh de célérité V_R se propageant à la surface libre du semi-espace de la Fig. 4.15 et dans la direction des x positifs.

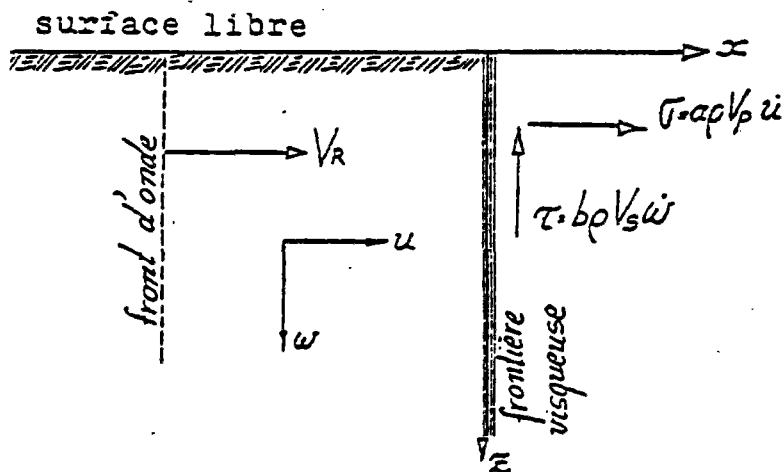


Fig. 4.15 - Absorption de l'onde de Rayleigh par le bord "visqueux" vertical.

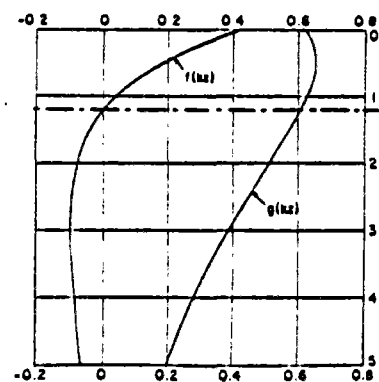


Fig. 4.16 - Amplitudes des déplacements horizontal et vertical correspondants à l'onde de Rayleigh d'un semi-espace élastique ($\nu = 0,25$).

Selon la formulation choisie par Ewing et al. [], les déplacements en fonction de la profondeur normalisée sont les suivants :

$$u = f(kz) \sin(\omega t - kx) \quad (4.82)$$

$$w = g(kz) \cos(\omega t - kx) \quad (4.83)$$

$$\text{où le nombre d'onde : } k = \frac{\omega}{V_R}$$

La variation de f et g en fonction de kz pour un semi espace élastique de $\nu = 0,25$ est indiquée sur la Fig. 4.16. La célérité de l'onde de Rayleigh et les valeurs des fonctions f et g dépendent du coefficient de Poisson. Pour $\nu = 0,25$ on a :

$$V_R = \frac{V_S}{\eta}, \quad \eta = 1,08766 \text{ et}$$

$$f(kz) = D [\exp(-0,8475 kz) - 0,5773 \exp(-0,3933 kz)] \quad (4.84)$$

$$g(kz) = D [-0,8475 \exp(-0,8475 kz) + 1,4679 \exp(-0,3933 kz)] \quad (4.85)$$

dans lesquelles D est une constante.

La contrainte normale dans le plan vertical :

$$\sigma = -(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\text{d'où } \sigma = k [(\lambda + 2\mu) f(kz) - \lambda g'(kz)] \cos(\omega t - kx) \quad (4.86)$$

dans laquelle, $g'(kz)$ représente $dg/d(kz)$.

De la même façon, le cisaillement dans le plan vertical :

$$\tau = -k\mu [f(kz) + g(kz)] \sin(\omega t - kx) \quad (4.87)$$

En outre, d'après les équations 4.82 et 4.83 on a :

$$\dot{u} = \omega f(kz) \cos(\omega t - kz) \quad (4.88)$$

$$\dot{w} = -\omega g(kz) \sin(\omega t - kz) \quad (4.89)$$

En substituant les équations 4.86, 4.87, 4.88 et 4.89 dans les conditions aux limites suivantes :

$$\sigma = a \rho V_T \dot{u}$$

$$\tau = b \rho V_S \dot{w}$$

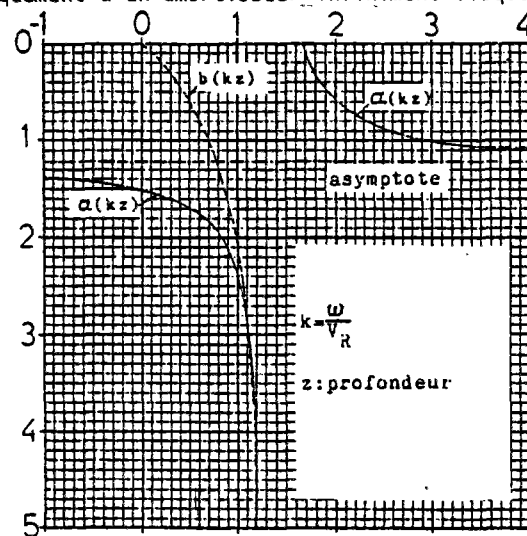
On obtient :

$$a(kz) = \frac{n}{s} \left[1 - s^2 \frac{g'(kz)}{f(kz)} \right] \quad (4.90)$$

$$b(kz) = n \left[1 + \frac{f'(kz)}{g(kz)} \right] \quad (4.91)$$

La variation de a et b pour $\nu = 0,25$ est indiquée sur la Fig. 4.17. Etant donné que $zk = 2\pi \times$ (profondeur/longueur d'onde), on voit qu'en dessous des profondeurs supérieures à $\lambda/2$ les paramètres a et b tendent vers des valeurs constantes. Par ailleurs à la profondeur où le déplacement horizontal est nul, le paramètre a tend vers l'infini ce qui correspond physiquement à un amortisseur infiniment visqueux.

Fig. 4.17 - Variation des coefficients a et b en fonction de la profondeur normalisée, kz .



Notons que pour la frontière horizontale, les paramètres a et b sont fonction de kz et de $\sin(\omega t - kx)$; par conséquent il est plus facile en pratique de choisir un modèle suffisamment profond que d'appliquer une frontière horizontale visqueuse. Vu la décroissance exponentielle des déplacements avec la profondeur, il est raisonnable de prendre une profondeur égale à $3/4$ de la longueur de l'onde de Rayleigh.

Comme les paramètres a et b dépendent de ω , il est impossible d'appliquer la frontière ci-dessus décrite au cas des chargements transitoires.

Bien que la méthode de résolution numérique utilisée par les auteurs soit une méthode à variables complexes, les frontières visqueuses proposées sont applicables dans des méthodes pas-à-pas.

4.4 - CALCULS NUMERIQUES

4.4.1. Monocouche à base indéformable :

Comme il est dit au début de ce chapitre, le fait que la base de la fosse d'essais ait une rigidité élevée ($E = 200 \text{ MPa}$), nous a amené dans une première étape à simplifier le problème en supposant une base indéformable pour la couche à compacter.

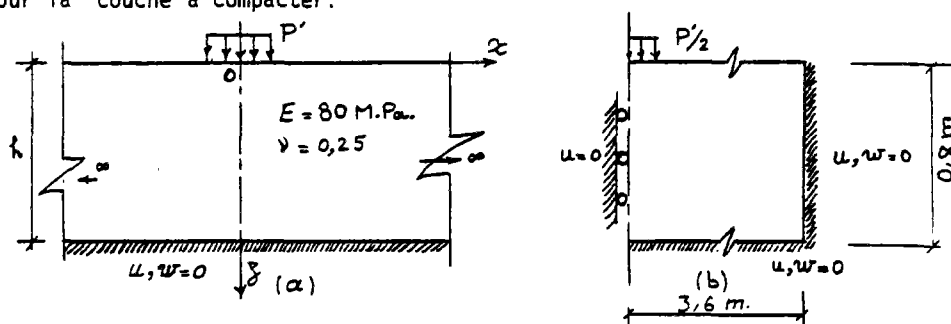


Figure 4.18 - Schémas du problème à résoudre (a) et du modèle numérique choisi (b).

Disposant des résultats de mesures correspondant à la planche VIBREX n° 37 nous avons établi un modèle numérique (Fig. 4.18 (b) dont le maillage est indiqué par la Fig. 4.18 (c)).

Les résultats expérimentaux sont les enregistrements relatifs à la 34ème passe du rouleau vibrant (Vibrex) sur une grave d'épaisseur 90 cm et de module d'élasticité environ 80 MPa. Il s'agit des signaux émis par trois capteurs de pression ($z = 32, 62$ et 90 cm), deux capteurs d'accélération ($z = 10$ et 90 cm) et la jauge de contrainte donnant la force totale appliquée.

La fréquence de vibration est de 937 tours/min ($f = 15,62 \text{ Hz}$) et le poids volumique du matériau est environ 20 KN/m^3 ($\rho = 2000 \text{ Kg/m}^3$).

On ne tient pas compte des forces de volume car l'équilibrage des capteurs a été fait sous l'effet des forces de masse, autrement dit le "zéro" des signaux enregistrés correspond à l'état des capteurs sous les forces de masse. On accepte l'hypothèse arbitraire d'une répartition uniforme de la force totale dans l'aire de contact bille-sol dont la largeur est supposée égale à 22,5 cm. On a :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{80}{2,5} = 32 \text{ MPa} \quad (\nu = 0,25 \text{ choisi arbitrairement})$$

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 126.49 \text{ m/s}$$

$$V_p = \sqrt{\frac{2\lambda + G}{\rho}} = \sqrt{3} V_s = 219.09 \text{ m/s}$$

La distance entre les points les plus proches étant de 12,5 cm, le pas de temps choisi est :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{V_p} = 0,00057 \text{ sec.}$$

soit $\Delta t = 0,0005 \text{ sec.}$

Le nombre d'intégrations pour une période de chargement est donc :

$$N = \frac{0,064}{0,0005} = 128$$

Les cas élastique et visco-élastique (linéaire) ont été traités. Dans le calcul visco-élastique nous avons choisi (voir Eq. 4.53).

$$\alpha = 0.05$$

$$\beta = 0$$

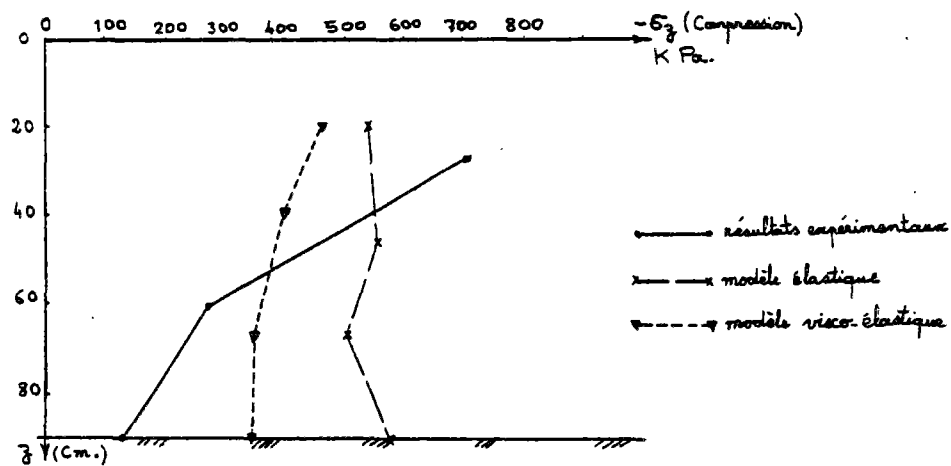


Fig. 4.19 - Variation en profondeur des pressions verticales maximales.

La comparaison des résultats expérimentaux avec ceux des calculs ont montré le désaccord non négligeable qui existe entre la réalité et les modèles ci-dessus. Comme on remarque en comparant les courbes de la Fig. 4.19, la cause principale de ce désaccord, c'est en effet l'indéformabilité de la limite inférieure du maillage qui constitue une frontière parfaitement réfléchissante. Alors qu'en réalité la pression induite diminue très rapidement avec la profondeur, la superposition des ondes incidentes et réfléchies dans le modèle discret a pour effet d'augmenter les contraintes au voisinage de la limite inférieure.

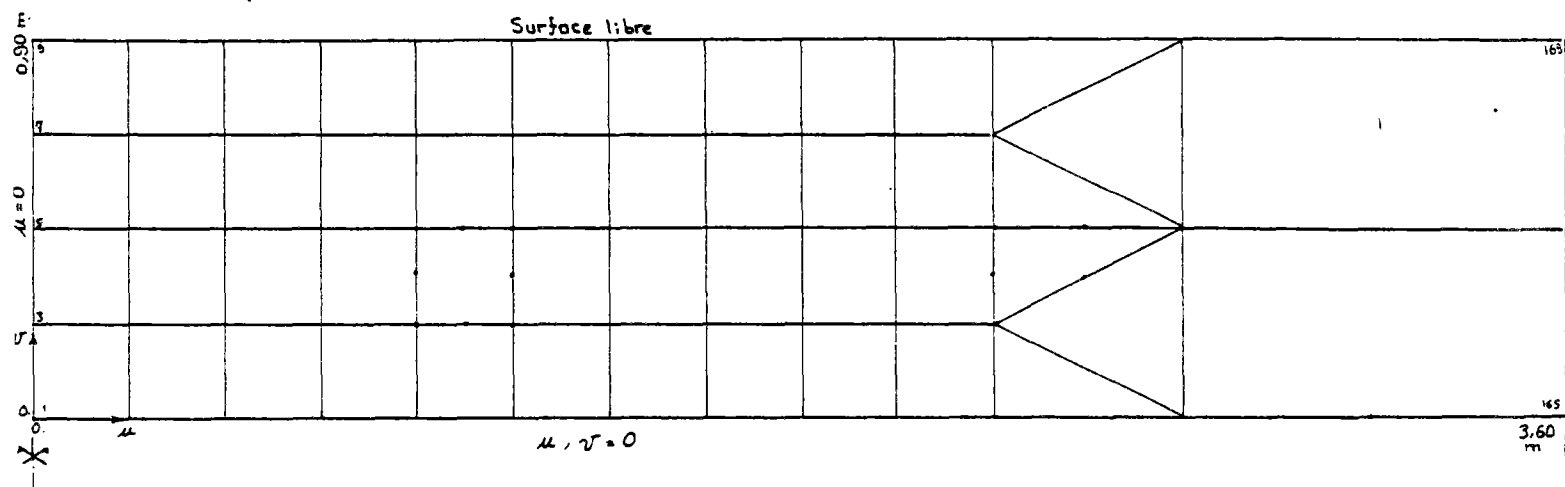


Fig.4.18(c)- Maillage du monocouche à base indéformable.

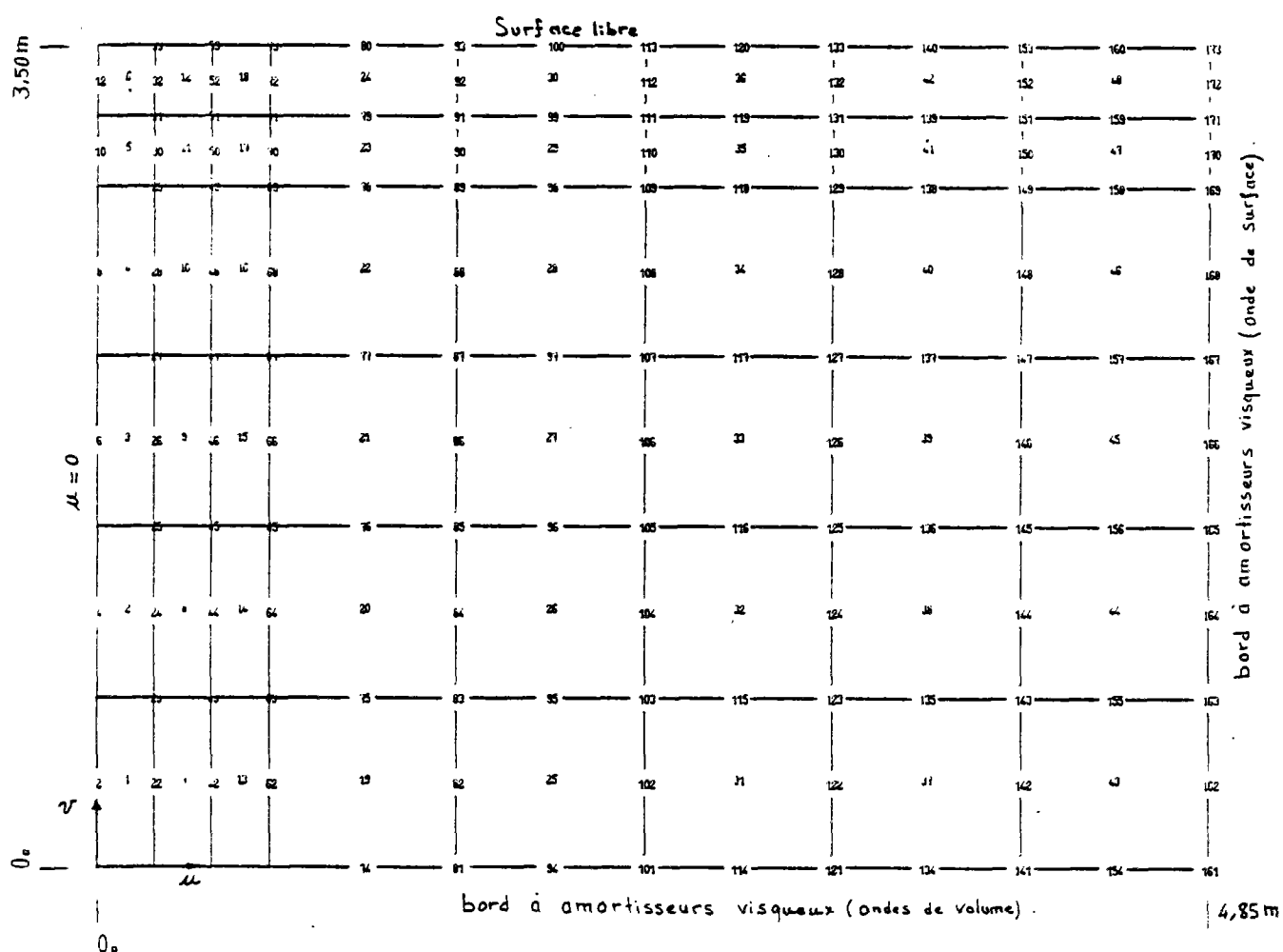


Fig.4.25(b)- Maillage du modèle à "bords visqueux" simulant le semi-espace élastique.

4.4.2. Application des bords visqueux :

a) Propagation des ondes longitudinales "monodimensionnelles"

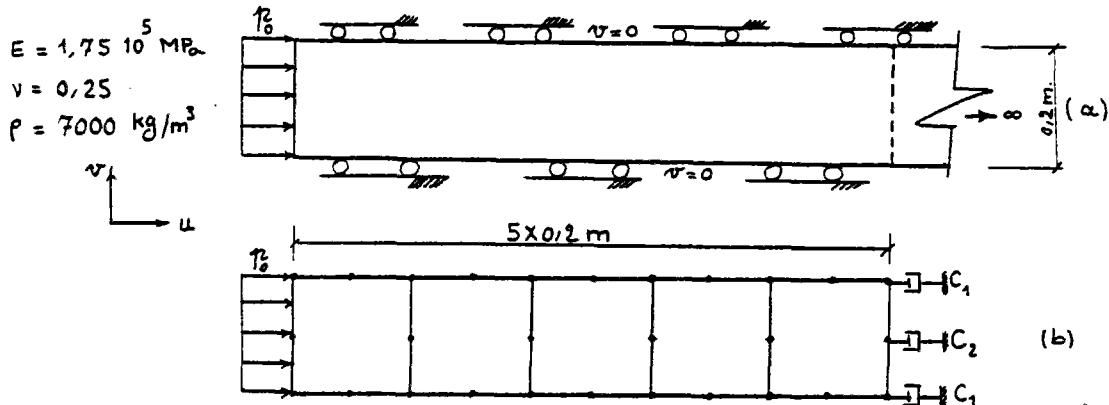


Fig. 4.20 - Milieu oedométrique semi-infini (a) et modèle discret à bord visqueux simulant ce milieu (b).

Considérons la propagation des ondes monodimensionnelles dans le milieu "oedométrique" de la Fig. 4.20 (a). Il s'agit en effet d'un milieu semi-infini soumis sur toute sa surface à une charge uniforme normale. Le modèle discret choisi - Fig. 4.20 (b) - comprend 5 éléments quadrilatères et 28 noeuds et le problème est en déformation plane. On cherche à définir les coefficients d'amortissement C_1 et C_2 de la sorte qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie sur la limite arbitrairement choisie. On note que la seule onde qui puisse se propager dans le milieu considéré est une onde longitudinale monodimensionnelle dont la vitesse de propagation est donnée par l'équation 4.7.

On a :

$$E_{\text{oed}} = \frac{1 - \nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} E = 1,2 E$$

$$E_{\text{oed}} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

d'où $V_p = 5477,23 \text{ m/sec.}$

donc $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{V} = 18,257 \cdot 10^{-6} \text{ sec.}$

soit $\Delta t = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ sec. } (V_p = 9,86 \text{ cm}/\Delta t).$

Le coefficient d'amortissement par unité de surface est donné par l'équation 4.12 :

$$c = \sqrt{E_{\text{oed}} \rho} = 3,834 \cdot 10^7 \frac{\text{Pa.s}}{\text{m}}$$

$$(\text{=} 3,834 \frac{\text{bar.sec}}{\text{cm}})$$

Pour la section considérée ($S = 0,20 \times 1 = 0,2 \text{ m}^2$) :

$$C = 0,2 \times 3,834 \cdot 10^7 = 76,68 \cdot 10^5 \text{ Pa.s}$$

Plusieurs calculs ont été faits pour déterminer les valeurs à donner à C_1 et C_2 ; d'après ces calculs la répartition correcte est la suivante :

$$C_1 = \frac{1}{6}C$$

$$C_2 = \frac{4}{6}C$$

Charges appliquées

Deux types de chargement ont été étudiés :

1) Pression uniforme sinusoïdale (Fig. 4.21) :

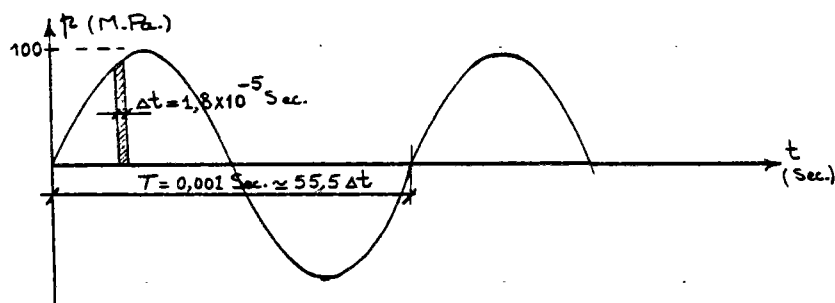


Fig. 4.21 - Charge sinusoïdale

La comparaison des résultats de calcul (relatifs au trentième incrément) avec les résultats analytiques du milieu semi-infini (4.1.1.b) a montré que l'énergie réfléchie est négligeable.

2) Pression uniforme transitoire :

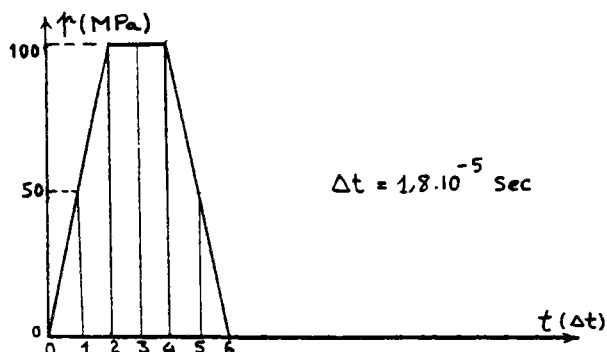


Fig. 4.22 - Charge transitoire

Afin de suivre facilement le phénomène de la propagation de l'onde dans un milieu, nous avons choisi une charge transitoire dont la variation dans le temps est indiquée sur la Fig. 4.22.

Les courbes de la Fig. 4.25 indiquent la variation dans le temps de la contrainte normale s'appliquant sur trois sections droites différentes. On constate qu'effectivement l'énergie réfléchie est négligeable et les amortisseurs "fictifs" absorbent presque la totalité de l'énergie incidente. Par ailleurs, la vitesse de propagation de l'onde dans le modèle est égale à celle correspondant au milieu semi-infini.

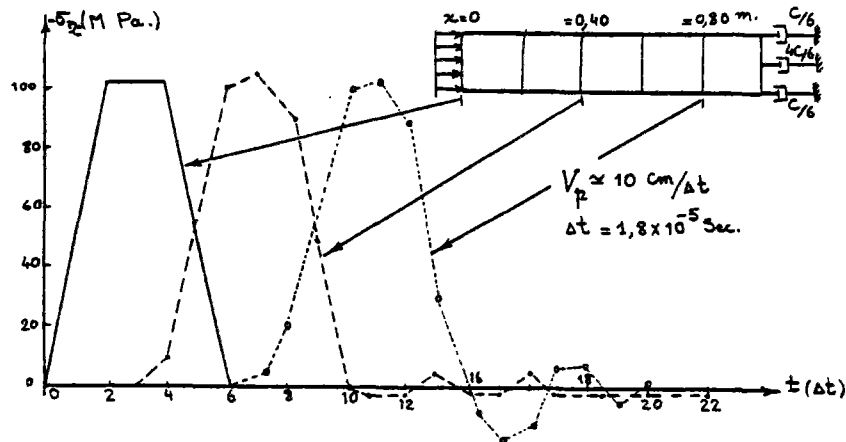


Fig. 4.23 — Variation dans le temps de la contrainte normale dans trois sections droites.

Notons enfin qu'au bout de 20 pas de temps, le modèle présente une translation d'environ 0,18 mm dans le sens des x positifs, ce qui reflète l'effet de propagation des déplacements dans la partie semi-infinie simulée par les amortisseurs.

b) Propagation des ondes sphériques dans un semi-espace élastique :

$$\begin{aligned} E &= 50 \text{ MPa} \\ \nu &= 0,25 \\ \rho &= 1800 \text{ Kg/m}^3 \\ r_0 &= 0,5 \text{ m} \\ p_0 &= 100 \text{ KPa} \\ \omega &= 50 \pi \end{aligned}$$

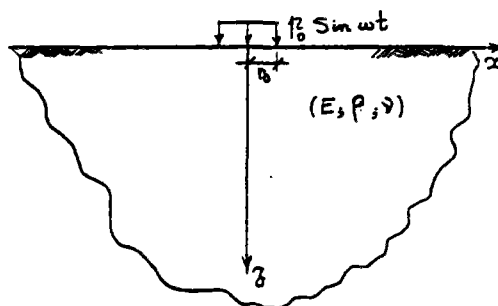


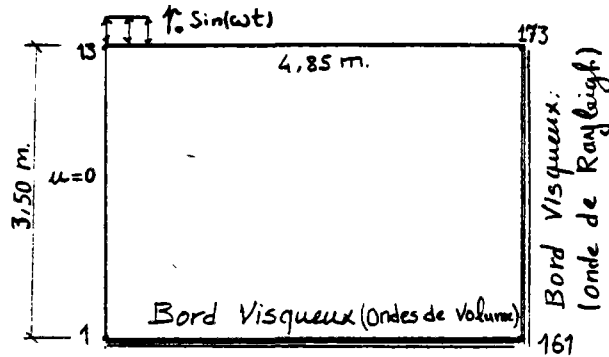
Fig. 4.24 - Semi-espace élastique soumis à une charge harmonique uniforme.

Soit un semi-espace élastique soumis, à sa surface, à une charge sinusoïdale normale, uniformément répartie dans un cercle de rayon r_0 . Les valeurs numériques des caractéristiques du massif et du chargement sont indiquées sur la Fig. 4.24. Ce problème est résolu analytiquement par Quinlan ainsi que par Sung [84] (voir § 2.4.4) ; mais en ce qui concerne les solutions explicites, seule celle du déplacement au centre de l'aire chargée est calculée par Sung.

Modélisation du problème

Le problème présente une symétrie de révolution. Le maillage utilisé comprend 42 éléments quadrilatères et 173 noeuds (Figs. 4.25 (a) et (b)).

Fig. 4.25 (a) - Schéma du modèle discret simulant le semi-espace élastique.



Il faut déterminer les valeurs des coefficients d'amortissement correspondant aux noeuds qui se trouvent sur le bord inférieur (1-161) et sur le bord vertical (161-173). Ces deux bords auront pour fonction d'"absorber" respectivement l'énergie des ondes de volume (longitudinales et transversales) et celle des ondes de Rayleigh. Nous avons :

$$V_P = 182,57 \text{ m/s}$$

$$V_S = 105,41 \text{ m/s}$$

$$V_R = 0,9194 V_S = 96,91 \text{ m/s}$$

et la longueur de l'onde de Rayleigh est :

$$L_R = \frac{V_R}{f} = 3,88 \text{ m} \quad (f = 25 \text{ Hz}).$$

La force totale appliquée étant $P = Z \cos \omega t$ (Z positive dans le sens de la normale extérieure), le déplacement au centre du cercle est donné par la formule suivante :

$$w(0,0,t) = \frac{Z}{Gr_0} [f_1 \cos \omega t - f_2 \sin \omega t]$$

où, f_1 et f_2 sont des fonctions dépendant de la fréquence sans dimension, a_0 (Equation 2.16) :

$$a_0 = \frac{\omega r_0}{V_S}$$

Pour notre problème :

$$a_0 = 0,745 ;$$

et d'après les courbes de la Fig. 2.15 :

$$f_1 = -0,21,$$

$$f_2 = 0,10.$$

Ainsi, pour la force $p = \pi r_0^2 p_0 \sin \omega t$, le déplacement sera :

$w(0,0,t) = 0,00183 \sin(157,08 t - 0,44)$ (m), qui présente un déphasage de 0,44 Rad. par rapport à la pression appliquée.

$$\psi = \text{Arc tg } \frac{-f_2}{f_1} = 0,44 \text{ Rad.}$$

La longueur et la profondeur du modèle sont respectivement égales à $1,25 L_R$ et $0,90 L_R$.

L'incrément de temps retenu, $\Delta t = 8,333 \cdot 10^{-4}$ sec., est égal à 1/48ème de la période de vibration ($T = 0,04$ sec.)

Les coefficients d'amortissement des noeuds du bord inférieur sont calculés de la manière suivante (Fig. 4.26) :

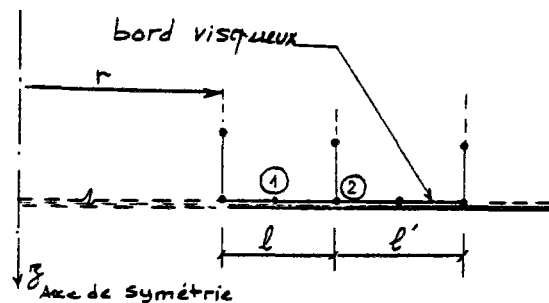


Fig. 4.26 - Position des noeuds des éléments quadrilatères par rapport à l'axe de symétrie.

Pour les points qui se trouvent au milieu du côté des éléments :

$$C_z = (2\pi r) (a \rho V_p) \left(\frac{4l}{6}\right)$$

$$C_x = (2\pi r) (b \rho V_s) \left(\frac{4l}{6}\right)$$

où $a = b = 1$ et r est la distance du noeud considéré à l'axe de symétrie.

Pour les noeuds communs entre deux éléments voisins, il faut remplacer, dans les équations précédentes, $\left(\frac{4l}{6}\right)$ par $\left(\frac{l + l'}{6}\right)$.

En ce qui concerne le bord vertical (161-173), les coefficients sont calculés par des formules suivantes :

$$C_x = (2 \pi L) (a \rho V_p) \left(\frac{4l}{6} \text{ ou } \frac{l + l'}{6}\right)$$

$$C_z = (2 \pi L) (b \rho V_s) \left(\frac{4l}{6} \text{ ou } \frac{l + l'}{6}\right)$$

où a et b , qui varient avec la profondeur et qui dépendent de la fréquence de vibration, sont définies par les équations 4.90 et 4.91. L est la distance du bord vertical à l'axe de symétrie.

Notons que le facteur $(2 \pi r \text{ ou } L) \left(\frac{4l}{6} \text{ ou } \frac{l+l'}{6} \right)$ représente en effet la "surface d'influence" des noeuds des éléments quadrilatères dans un problème à symétrie axiale.

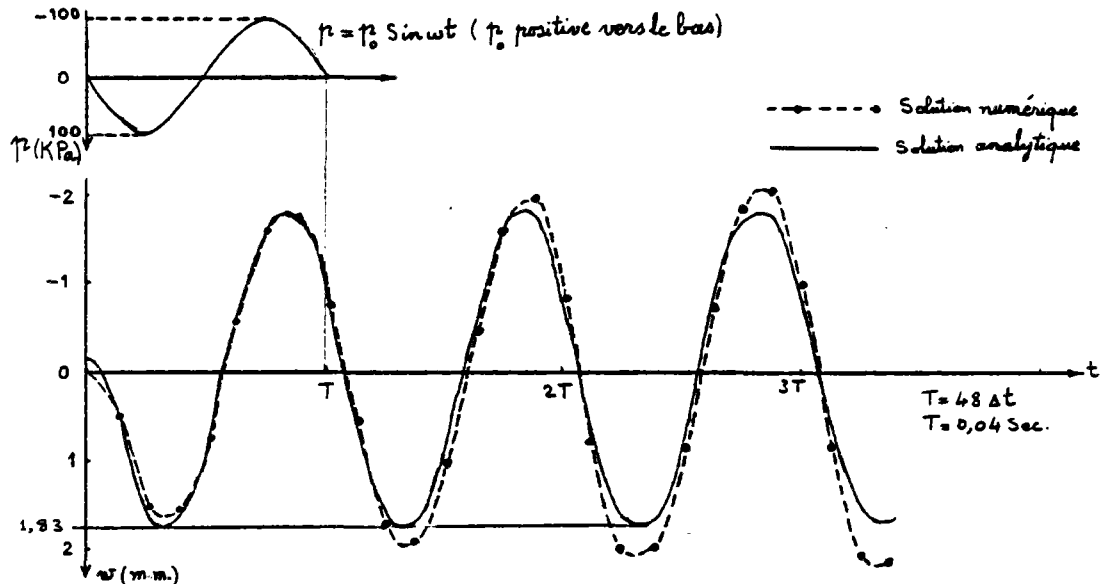


Fig. 4.27 - Déflexion au centre de l'aire chargée.

La variation dans le temps de la déflexion du centre du cercle chargé, $w(0,0,t)$, est montrée par la Fig. 4.27. Le calcul numérique est effectué pour plus de 140 pas de temps, c'est-à-dire pour plus de trois périodes de vibration. La comparaison des résultats analytiques et numériques montre que pour la première période, il existe une coïncidence remarquable entre les deux courbes mais au cours des périodes suivantes l'amplitude de la déflexion du modèle numérique s'accroît légèrement avec le temps. Cet écart est dû à la réflexion de l'énergie non absorbée par les bords, car comme il a été souligné précédemment (4.3.3), ceux-ci ne sont pas complètement absorbants et quelques pour cent de l'énergie incidente seront réfléchis.

Cependant, l'écart entre les deux solutions reste négligeable et, compte tenu du fait qu'au bout de 2,5 périodes toutes les premières ondes non absorbées par les bords soient déjà parvenues au point $(0,0)$, montre que le modèle est bien adapté pour simuler le comportement du massif semi-infini. Par ailleurs, l'examen de la variation des déplacements et des contraintes dans le massif montre que l'amplitude de ces grandeurs diminue progressivement avec la profondeur. Les courbes isovaleurs correspondant à $t = T$ (48ème pas de temps) sont indiquées en Annexe 3.

4.5 - CONCLUSIONS

Ce travail n'est qu'un premier pas dans le domaine de l'étude par la méthode des Eléments Finis du comportement dynamique du matériau soumis au compactage (essais VIBREX) ; nous nous sommes en effet limités à l'étude de faisabilité correspondant à la simulation des massifs semi-infinis élastiques ou visco-élastiques au moyen des modèles à bords non réfléchissants. Pour cela nous avons adapté, à la suite d'une étude bibliographique, la méthode des "bords visqueux" de Lysmer et Kuhlemeyer qui est appliquée à l'origine dans un programme de calcul à variables complexes. Les exemples traités démontrent que cette méthode est en effet applicable dans le programme Rosalie qui utilise, lui, le procédé de l'intégration pas-à-pas dans l'espace du temps.

Enfin, la comparaison des résultats expérimentaux avec ceux des calculs numériques met en évidence que le massif constituant la base de la fosse d'essais, quoiqu'il soit plus rigide que la couche surmontant, transmet une partie non négligeable de l'énergie du compactage. Ceci résulterait en premier lieu du fait que la fréquence de vibration étant assez basse, la "profondeur" de l'onde de Rayleigh (l'onde qui transmet la partie la plus grande de l'énergie radiée) est beaucoup plus grande (plusieurs fois) que l'épaisseur de la couche compactée.

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'articulation des différents domaines de l'étude sur l'efficacité du compactage par vibration a été rappelée au premier chapitre. Nous avons vu que les seuls essais en laboratoire (sur des échantillons de matériaux) visant à interpréter le rôle de la vibration dans le compactage des matériaux granulaires, bien que nécessaires, ne sont pas suffisants pour décrire le processus de compactage dans sa globalité. En effet, il est d'une part très difficile, sinon impossible, de reproduire intégralement les conditions réelles, en raison notamment des conditions aux limites de l'éprouvette. Mais, de plus, ces études ignorent le rapport qui existe entre les différents paramètres caractéristiques de l'ensemble sol-compacteur vibrant et les sollicitations exercées sur le matériau.

L'étude de l'interaction de l'ensemble sol-rouleau vibrant nécessite :

- au plan expérimental des essais en vraie grandeur sur des "planches" dont les conditions aux limites sont uniformes ;
- dans le domaine théorique, des modélisations permettant l'utilisation des moyens mathématiques disponibles.

°°°

Dans ce dernier domaine, l'examen dans le deuxième chapitre des théories des massifs semi-infinis et l'analogie de Lysmer qui établit les liens explicites entre le semi-espace élastique et le modèle viscoélastique à un degré de liberté nous a permis d'interpréter certaines constatations issues du programme expérimental Vibrex.

Ainsi on a pu fournir une interprétation des variations irrégulières de l'amplitude du déplacement vertical de la bille selon le nombre de passes, et la variation de la "fréquence de résonance" avec le moment d'excentricité des balourds. Il apparaît par ailleurs nécessaire de tenir compte, dans l'interprétation du comportement de l'ensemble sol-rouleau vibrant de la rigidité relative du substratum (base de la fosse dans le cas du Vibrex) et, dans une certaine mesure, des variations de la répartition des charges dans l'empreinte.

Le résultat le plus notable, à notre avis, de cette approche, est la mise en évidence du rôle de la variabilité de la surface de contact entre la bille et le sol : une diminution par exemple de 5 % de l'aire d'empreinte au cours d'une opération de compactage aura pour effet, par rapport au cas où elle serait constante, de diminuer la puissance dissipée de 15 %, ...

Il apparaît en effet que la variation de l'aire d'empreinte en fonction des caractéristiques mécaniques du matériau granulaire est un facteur essentiel des variations du comportement vibratoire de la bille vibrante, ainsi que de celles des sollicitations induites dans le matériau.

°°

A la suite de ces constatations, des essais, en vraie grandeur, sur un matériau frottant (grave propre) et un sol fin (limon plastique) ont donc été réalisés pour mieux connaître les variations de l'"empreinte". Par ailleurs, la recherche à l'aide de la méthode des éléments finis des modèles à comportement élasto-plastiques pouvant expliquer les résultats expérimentaux nous a permis de mieux connaître le rôle de différentes propriétés physiques du milieu granulaire dans la variation réelle de l'aire d'empreinte. Ces études mettent notamment en évidence les trois résultats suivants :

1) La valeur absolue de la largeur d'empreinte est beaucoup plus grande que celle correspondant au semi-espace élastique.

2) Cet écart traduit le décompactage, sur quelques centimètres de profondeur, de la partie supérieure de la couche sous l'effet des efforts tangentiels. En effet, le décompactage -donc la baisse des résistances mécaniques- du matériau en raison de grands déviateurs de contraintes appliqués entraîne une augmentation considérable de l'aire de contact par une "plastification locale", sous charges normales, de la zone décompactée.

3) C'est pourquoi, la variation de la largeur d'empreinte en fonction de la charge statique appliquée et du module de déformabilité "global" du massif du sol suit à peu près la loi élastique.

°°

Enfin, la recherche, dans le quatrième chapitre, des modèles (élastique ou viscoélastique) à éléments finis des massifs de sols, respectant au mieux les conditions aux limites réelles en présence des phénomènes dynamiques (propagation des ondes élastiques, réflexion, ...), nous a permis d'appliquer, dans le cadre du programme Rosalie, la méthode des "bords à amortisseurs visqueux" de Lysmer et Kuhlemeyer. Nous avons par ailleurs démontré sur un exemple que, bien que la base de la fosse d'essais (Vibrex) soit plus rigide que la couche qui la surmonte, elle transmet une partie non négligeable de l'énergie induite par le compactage, ce qui résulterait notamment de la basse fréquence de la vibration.

Au terme de ce travail, il nous apparaît que dans ce domaine de compactage par vibration les axes suivants se présentent pour l'étude du compactage par vibration :

1) Il y a encore, et de façon féconde, à interpréter les résultats des essais en vraie grandeur à l'aide des modèles mathématiques à paramètres concentrés, en tenant compte des particularités du comportement de l'ensemble sol-rouleau vibrant telles que la variabilité de l'aire d'empreinte, etc.

2) L'étude par la méthode des éléments finis des sollicitations induites en tout point du massif du sol, en s'appuyant d'une part sur les résultats de mesures in situ et, d'autre part, sur des modèles de comportement plus réalistes du matériau granulaire, définis par des essais en laboratoire, offre des perspectives nouvelles.

Si la première approche vise à définir l'efficacité du compactage par vibration en appréciant mieux les efforts appliqués à la surface du massif, c'est, en définitive, la deuxième approche qui saura définir l'efficacité de ces efforts dans la variation en profondeur de la compacité.

ANNEXE 1

ANNEXE 1

- 1- Photo. 1: Rouleau monobille A625(Richier) sur la planche N° 3.
- 2- Photo. 2: Empreintes "enregistrées" sur le papier sensible correspondant aux différentes valeurs de la charge statique transmise par la bille.
- 3- Photo. 3: Mise en place des capteurs de pression.
- 4- Courbes granulométriques des matériaux utilisés: Grave D1 , Limon naturel.
- 5- Résultats d'essais triaxiaux sur quatre échantillons de grave D1.
- 6- Résultats d'essais triaxiaux consolidé non drainés sur cinq échantillons de limon.
- 7- Résultats d'essais "Proctor normal".
- 8- Principes, caractéristiques et utilisation de la Dynaplaque.
- 9- Relation entre "module dynaplaque" et le module de déformabilité donné par des essais de plaque.

Photo. 1-Rouleau monobille A625
(Richier) sur la planche N° 3.

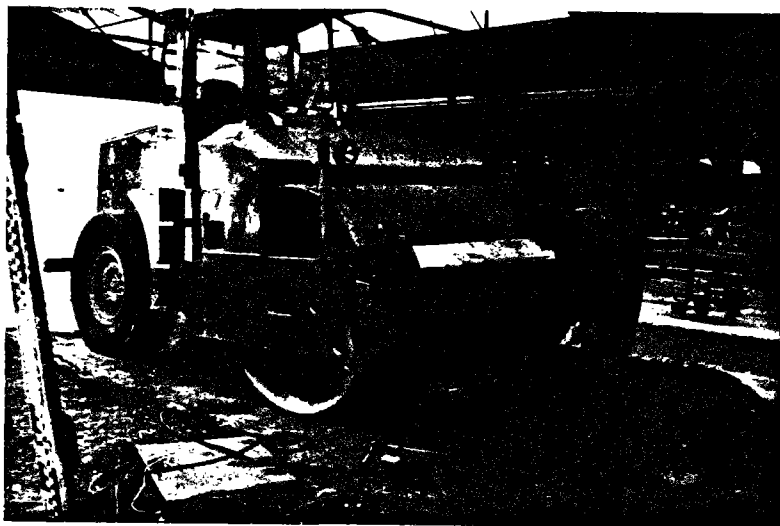
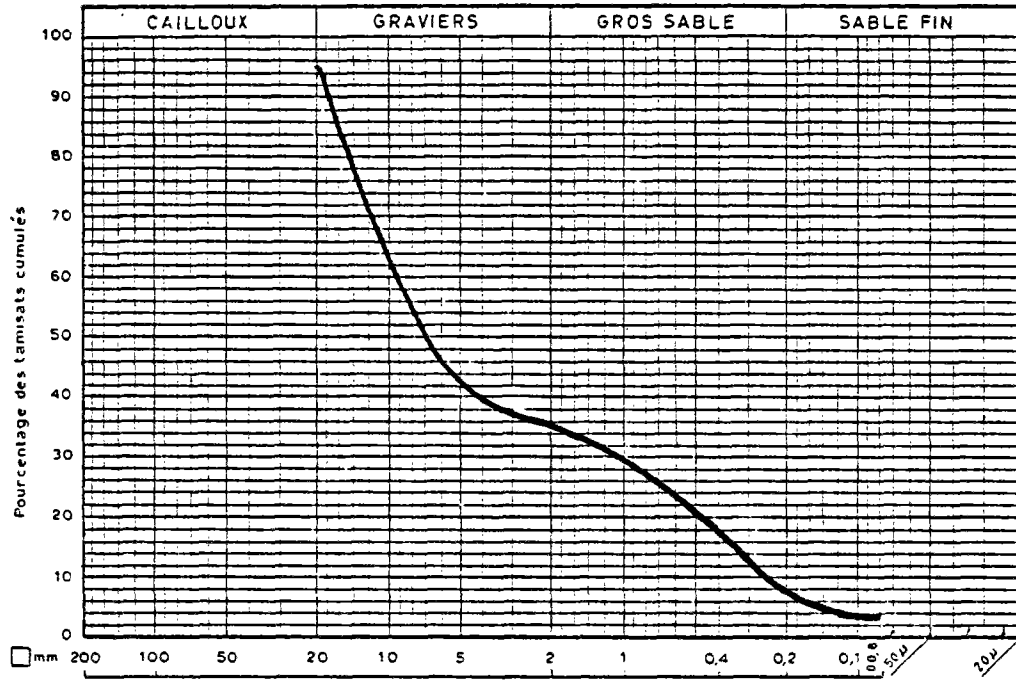


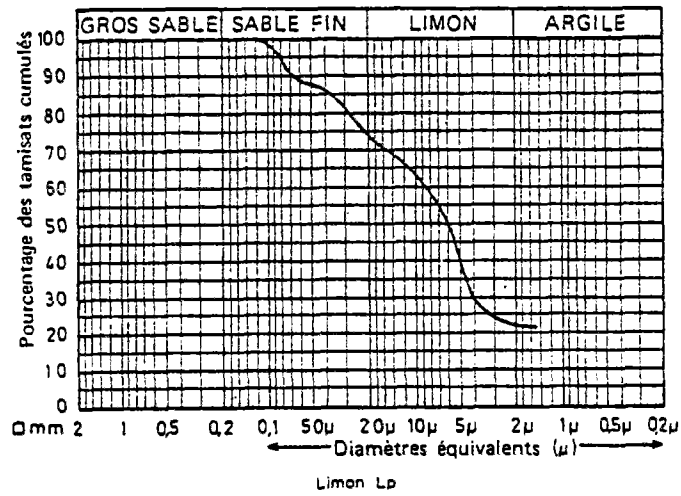
Photo. 2-Empreintes "enregistrées sur
le papier sensible correspondant aux
différentes valeurs de la charge sta-
tique transmise par la bille.

Photo. 3-Mise en place des
capteurs de pression.

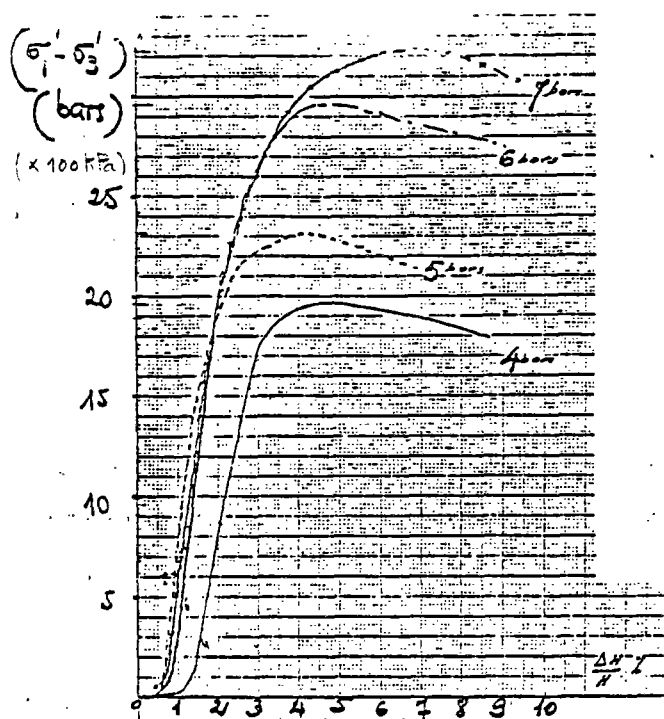




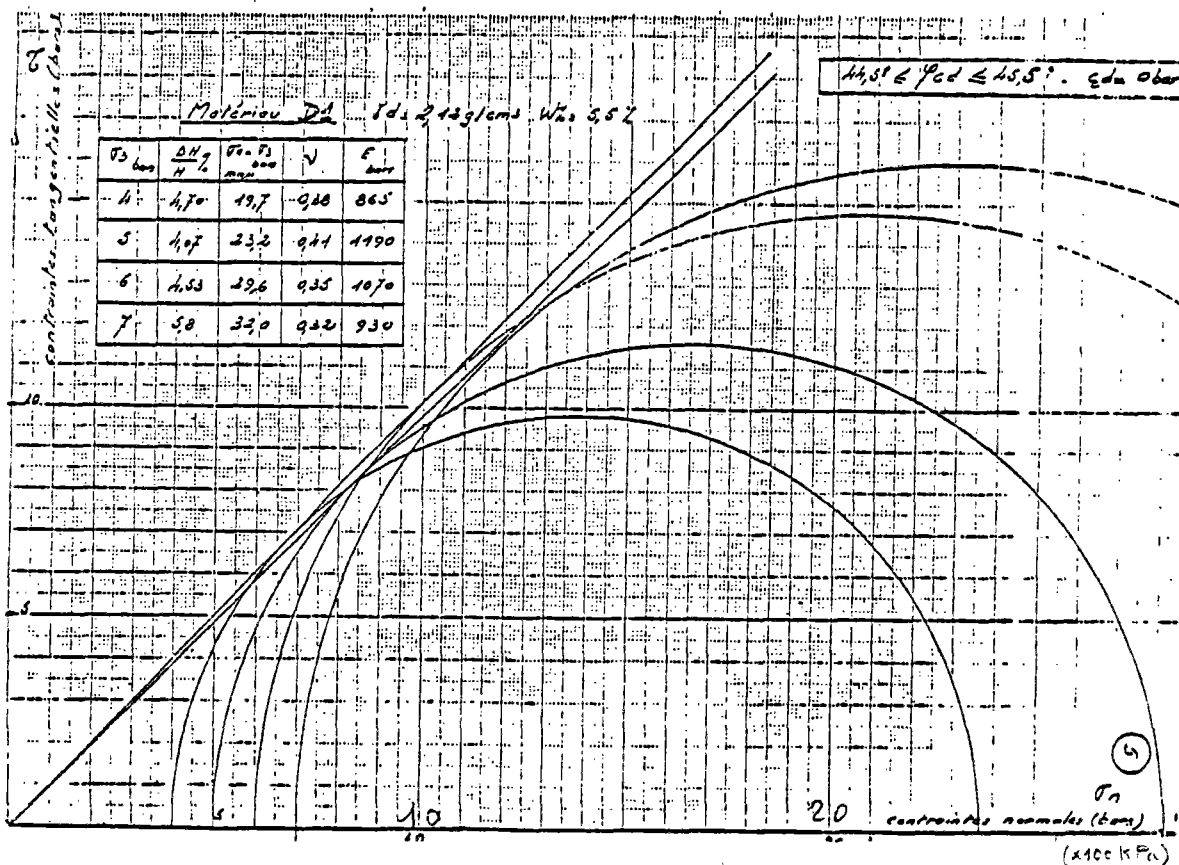
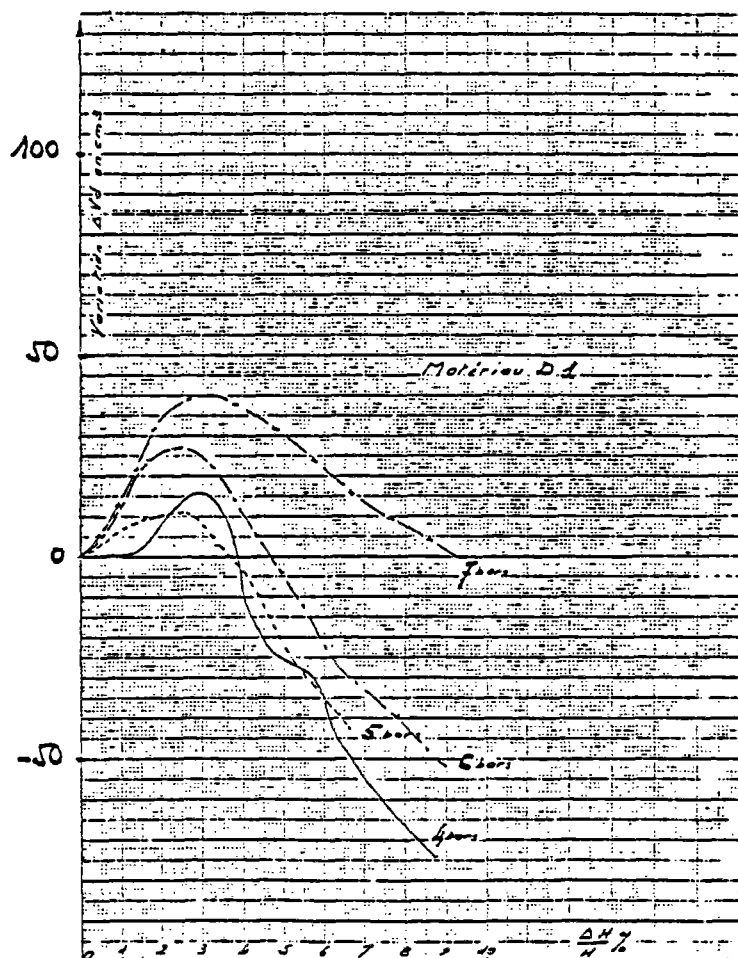
GRAVE D1



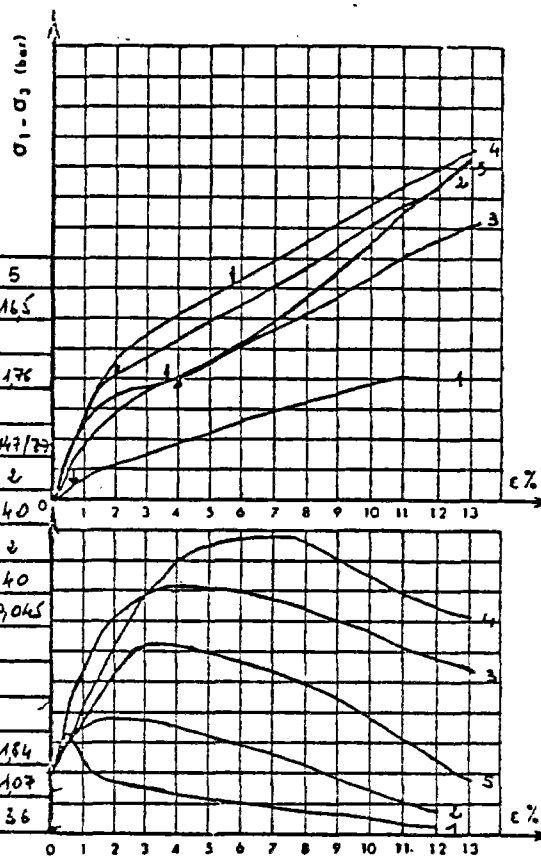
4- Courbes granulométriques des matériaux utilisés.



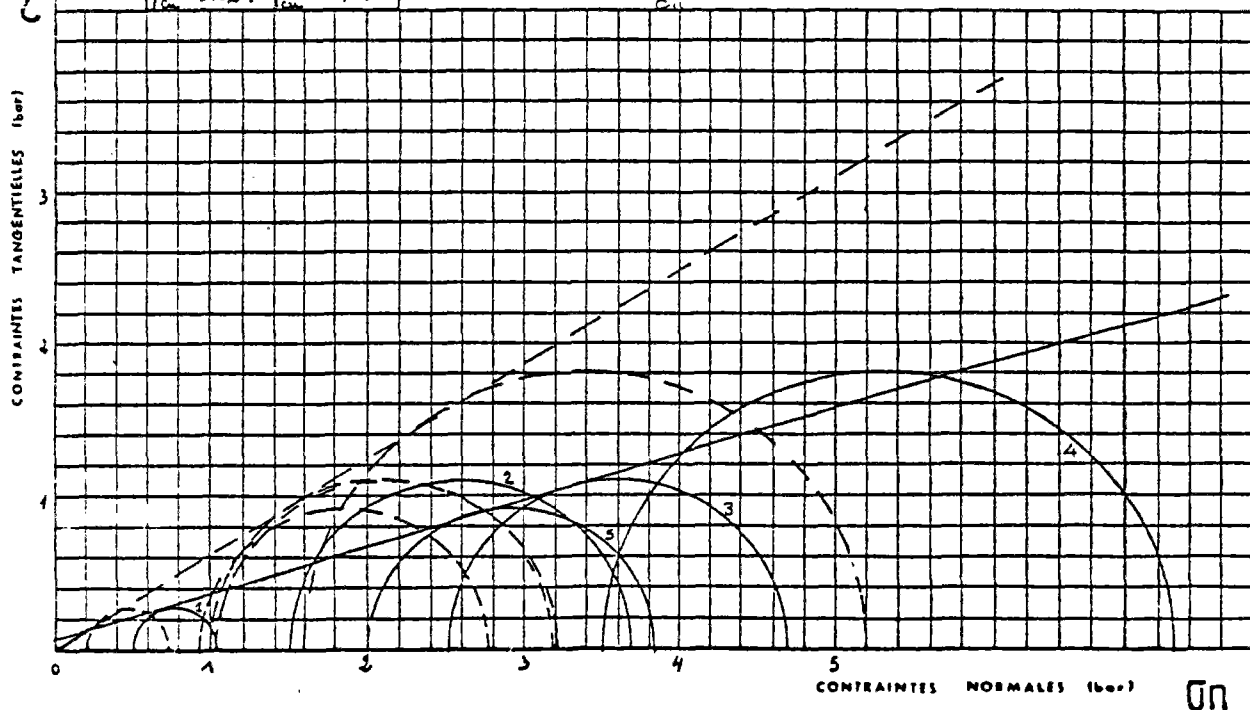
5- Résultats d'essais triaxiaux sur quatre échantillons de grave D1.



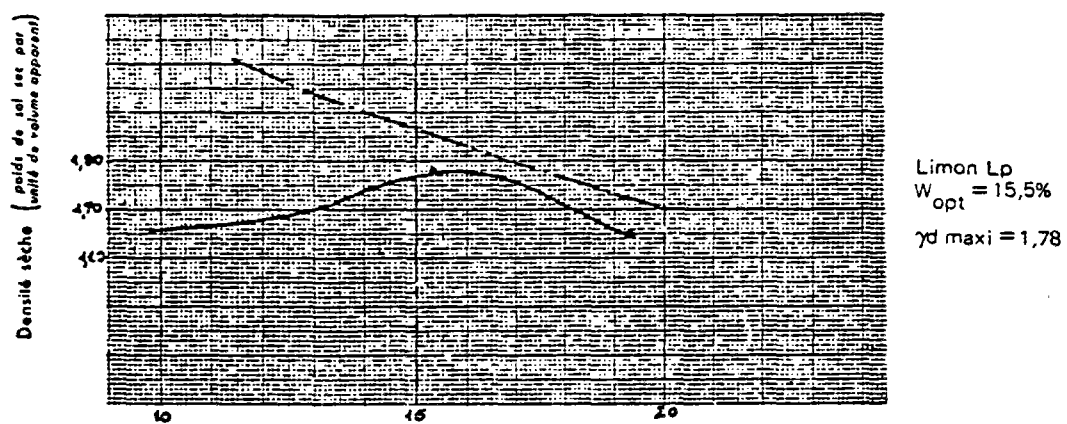
SONDAGE :		ECHANTILLON :		PROFONDEUR :	
NATURE DU SOL :					
WL		IP :		Cc3 Co :	
DRAINAGE : PIERRE POREUSE INFERIEURE - SUPERIEURE - FILTRE LATERAL					
ECHANTILLON :		INTACT		REMANIE COMPACTE	
MESURE DE U :		PIED - CENTRE - TETE			
EPROUVETTE		1	2	3	4
W % INITIALE		18,1	18	19,7	19,5
W % FINALE		17,6	16,6	17,7	17
γ_d INITIALE g/cm ³		1,685	1,685	1,67	1,665
γ_d FINALE g/cm ³		1,76	1,845	1,78	1,75
DIMENSIONS MID (mm)		150/77	150/77	144/77	146/77
σ_3 bar		0,5	1,5	2,5	3,5
t 100 (mn)		80	60	100	80
CONTRE PRESSION U bar		2	2	2	2
ΔV cm ³		29,5	64	62	55
VITESSE de DEFORMATION mm/mn		0,045	0,045	0,045	0,045
CRITERES de RUPTURE					
$(\sigma_1 - \sigma_3)$ (bar) à la rupture	$\sigma_1 - \sigma_3$ max				
	σ_1 / σ_3				
	U max	0,55	2,2	2,2	3,55
	U (bar) à la rupture	0,3	0,46	1,5	1,9
E % à la rupture		0,5	2,5	4,6	5,7
					36



$C_u = e_{cu} + \sigma_3 \tan \phi_{cu}$
 $C_u = 0,16$ $e_{cu} = 0,6$
 $p_u = 16,5$ $p_u = 31,5$
 avec $\sigma'_c < 1 \text{ bar} \rightarrow \frac{C_u}{\sigma'_c} = 120$

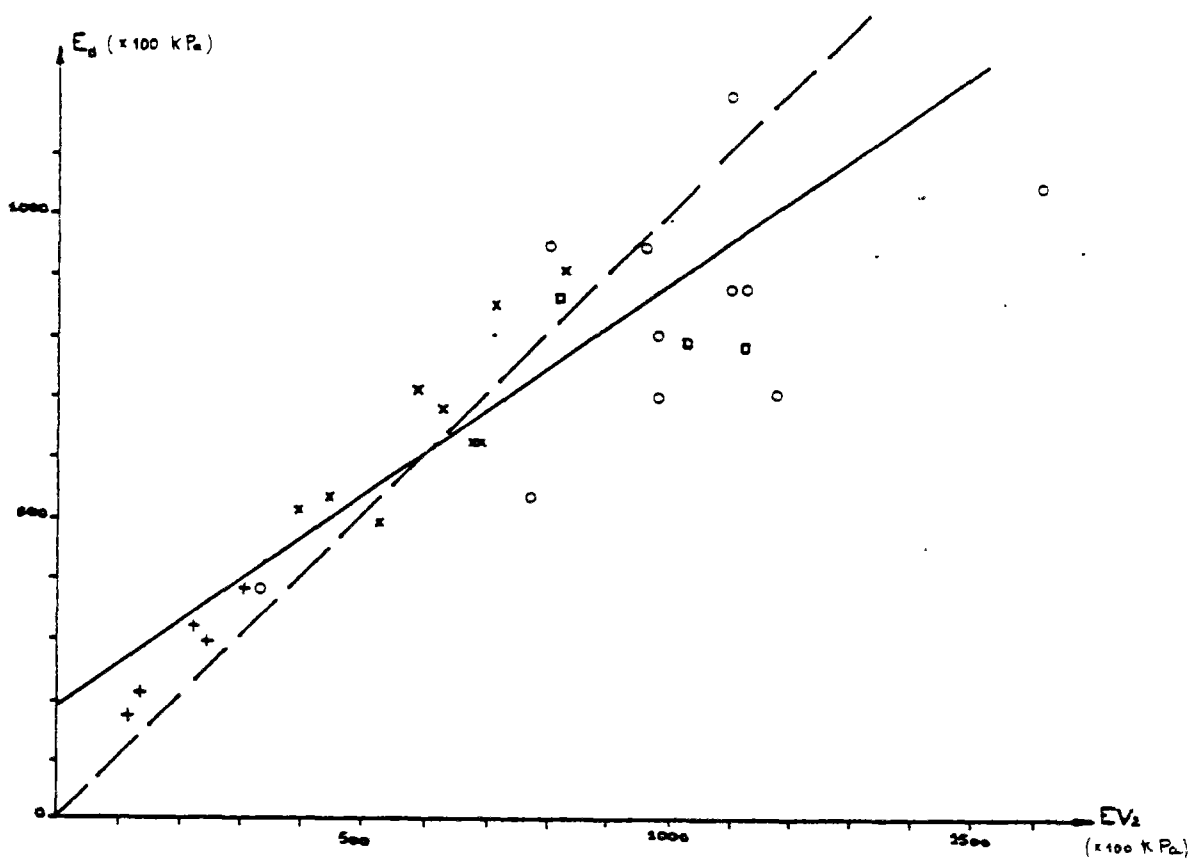


6- Résultats d'essais triaxiaux consolidés non drainés sur cinq échantillons de limon.



7- Résultats d'essais "Proctor normal".

$$E_d = 0.70 EV_2 + 18600 \text{ (kPa)}$$


 9 - Corrélation entre le module "dynaplaque" et le module de déformabilité
 donné par des essais de plaque ($\Phi = 600\text{mm}$). (C.E.R.)

MATÉRIELS
DES LABORATOIRES
DES PONTS ET CHAUSSEES



FRANCE

DYNAPLAQUE

1 T 76

Appareil de mesure de la déformabilité des plates-formes de terrassement et de couche de forme

APPLICATIONS

- ausculter et réceptionner des plates-formes de terrassement et de couche de forme destinées à recevoir un corps de chaussée ;
- apprécier le comportement à la fatigue de structures rustiques, telles que couches de forme, pistes de chantier, voies forestières ou agricoles, parkings etc.

CONDITIONS D'UTILISATION

- l'appareil est utilisable sur toutes les plates-formes dont la rigidité n'excède pas 1 500 bars, et constituées par des matériaux dont le diamètre des plus gros éléments est inférieur à 200 mm ;
- la conception de l'ensemble véhicule-appareil fait que l'on peut aisément accéder en tout point d'une plate-forme à ausculter et se rendre rapidement d'un chantier à un autre ;
- il est manoeuvrable par une seule personne qui, de surcroît, n'est pas tenue de sortir de la cabine du véhicule pendant l'exécution de l'essai ;
- il n'est pas recommandé d'utiliser l'appareil sur des plates-formes pentées à plus de 30 %.

PRINCIPE DE LA MESURE

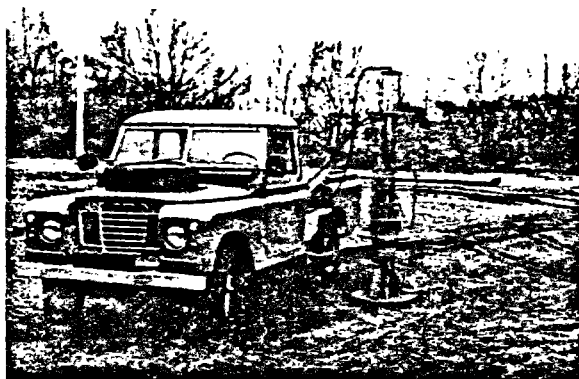
L'appareil permet d'appliquer sur la plate-forme à ausculter une sollicitation dynamique analogue en intensité et en fréquence à celle provoquée par le passage d'un essieu chargé à 13 tonnes, roulant à 60 km/h, au moyen d'une masse que l'on fait tomber sur une couronne de ressorts fixés sur la plaque reposant sur le sol.

On mesure la réponse de la plate-forme à cette sollicitation par le coefficient de restitution énergétique du choc ainsi engendré, qui s'exprime par le rapport entre la hauteur du rebond de la masse et sa hauteur de chute initiale.

Une courbe d'étalonnage fournie avec l'appareil permet de traduire le coefficient de restitution en un module dynamique.



La dynaplaque en position «transport».



La dynaplaque en position «mesure».

Si on applique un grand nombre de chocs en un point donné, l'évolution du module dynamique permet d'apprécier le comportement à la fatigue de la plate-forme testée.

DESCRIPTION DE L'APPAREIL

Il comprend :

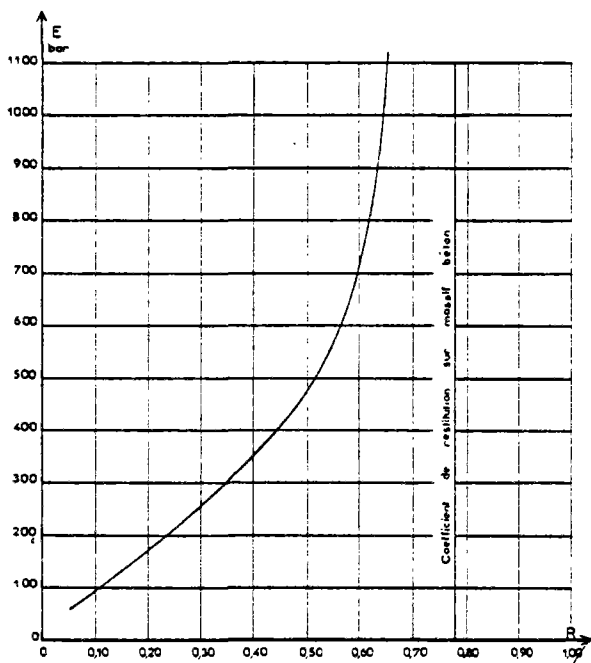
- le générateur d'impulsion constitué par la plaque d'appui au sol, les couronnes de ressorts, la colonne de guidage, la masse tombante et son système auto-bloquant sur la colonne en position rebond,
- le système hydraulique de commande de la levée et de la chute de la masse,
- le système de mesure et de dépouillement constitué par un codeur optique et une calculatrice imprimante donnant la hauteur de chute, la hauteur de rebond et le rapport de ces deux grandeurs.

L'ensemble de l'appareil, dont le poids est de 500 kg environ, est monté à poste fixe sur un véhicule léger à 4 roues motrices permettant d'accéder en tout point d'un chantier de terrassement et de se déplacer sur route à une vitesse de 90 km/h. La montée et la descente de l'appareil sur son véhicule est hydraulique ; les commandes générales du circuit hydraulique ainsi que l'imprimante sont à l'intérieur de la cabine.

PERFORMANCES

La courbe d'étalonnage montre que l'appareil a été dimensionné (choix des valeurs de la masse tombante, de la rigidité des ressorts et de la hauteur de chute) pour avoir une mesure suffisamment sensible dans le domaine des modules dynamiques compris entre 100 et 1 000 bars, ce qui correspond aux valeurs généralement observées pour les plates-formes de terrassement et de couche de forme.

- . la cadence des essais réalisables est de 20 essais à l'heure environ,
- . 150 secondes par essai, dont 60 secondes pour le déplacement entre 2 points d'essai,
- . temps d'un choc et d'une remontée de la masse : 6 à 8 secondes.



Etalonnage de la dynaplaque
Valeurs du module «E» (dynamique)
en fonction du coefficient de restitution R.

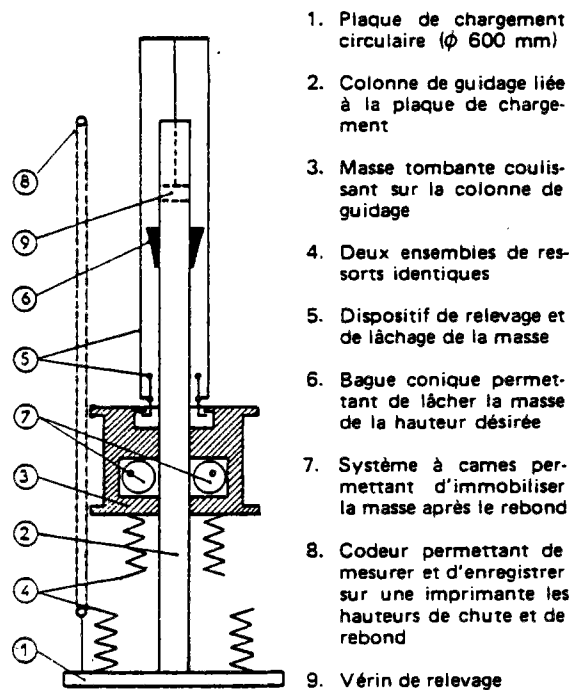


Schéma de principe de la dynaplaque

Pour tout renseignement complémentaire concernant la Dynaplaque, s'adresser au :

LABORATOIRE CENTRAL DES PONTS ET CHAUSSEES
58, boulevard Lefebvre - 75732 PARIS CEDEX 15 - Tél. : Paris (1) 532 31 79

ANNEXE 2

INTRODUCTION A LA THEORIE DE LA PLASTICITE ET A LA
RESOLUTION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS DES
PROBLEMES ELASTO-PLASTIQUES

Le comportement élastoplastique des massifs soumis aux chargements statiques peut être étudié par le programme Rosalie dans les cas où le comportement des matériaux constituant ces massifs obéit à un des critères classiques suivants :

- critère de Tresca,
- critère de Coulomb,
- critère de Von Mises (avec ou sans écrouissage),
- critère parabolique,
- critère de Drucker.

Ce sont les critères les plus connus de la théorie différentielle de la plasticité, fondés sur les caractéristiques mécaniques des matériaux isotropes.

Un corps est dit avoir un comportement élastoplastique quand, au-delà d'un certain niveau de chargement, il présente à la fois des déformations réversibles (élastiques) et des déformations irréversibles (plastiques).

La théorie classique d'élastoplasticité considère que le matériau est initialement isotrope, que le temps n'intervient pas, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'effet dû au fluage et (ou) à la relaxation, et, en outre, néglige les effets thermiques, dynamiques (comportement statique ou quasi-statique) et des grandes déformations Hill (1950).

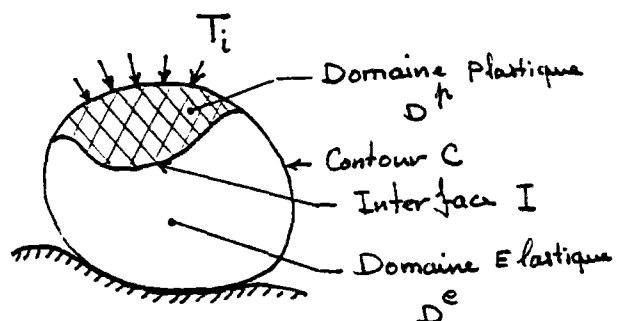
Le but essentiel recherché par la théorie est l'établissement des équations constitutives élastoplastiques. La position du problème élastoplastique est la suivante : étant donné un corps (Fig. 1), trouver

$$u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, I$$

satisfaisant à :

- a) l'équilibre (dans D , sur C et à travers I) ;
- b) la compatibilité des déplacements ;
- c) les lois constitutives élastiques linéaires (dans D^e) ;
- d) les lois constitutives élastoplastiques (dans D^p).

Fig. 1 - Problème aux limites élasto-plastique.



Dans la théorie de la plasticité, la loi de comportement comprend trois éléments principaux :

- un critère de plasticité initiale, définissant l'état de contraintes à partir duquel l'écoulement plastique peut se produire ;
- une loi d'écoulement plastique, reliant les incréments de déformation plastique aux contraintes et incréments de contraintes ;
- une loi d'écrouissage, décrivant l'évolution de la surface de plasticité au cours de l'écoulement plastique.

Schématisation de la courbe expérimentale de l'essai uniaxial

On admet, comme l'a proposé Prandtl, que la courbe contrainte-déformation résultant d'un essai uniaxial (traction simple pour les métaux), peut être idéalisée de la manière représentée à la Fig.2, c'est-à-dire en supposant que :

a) la courbe est linéaire jusqu'au point A, représentant la limite élastique initiale (et la limite de proportionnalité) ;

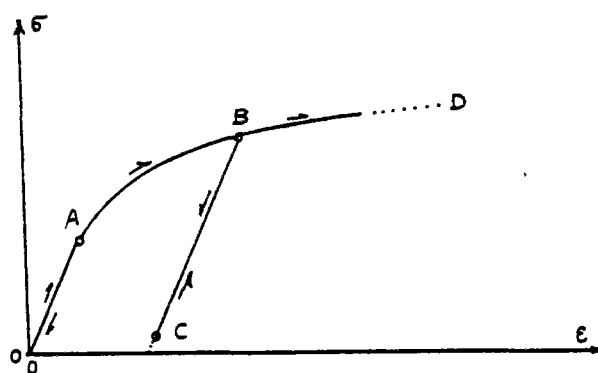


Fig. 2 - Courbe contrainte-déformation d'un essai uniaxial ;
(écrouissage positif) .

b) au-delà du point A, le matériau s'écrouit en suivant une courbe monotone irréversible : si la contrainte au point B diminue, le matériau suit la courbe BC qui :

- ne présente pas de boucle d'hystérésis ($BC = CB$),
- est linéaire et de même pente que OA,
- se raccorde à la courbe initiale ABD en B pour un nouveau chargement au-delà du point B, ce dernier point représentant la nouvelle limite élastique pour le chemin CBD,
- au-delà du point D, les déformations deviennent trop grandes pour entrer dans le cadre de la théorie, donc la fin de la courbe n'est pas considérée.

Hypothèses de base

1 - Décomposition des déformations totales

On admet que les déformations totales ϵ_{ij} se décomposent en une part élastique et une part plastique, la part élastique étant liée aux contraintes totales par la loi de Hook. On a donc :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (1)$$

$$\epsilon_{ij}^e = H_{ijkl} \cdot \sigma_{kl} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl}^e$$

avec $H = E^{-1}$

Cette hypothèse est directement inspirée de l'essai uniaxial ; elle est incorrecte en grandes déformations.

L'équation s'écrit :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij}^e + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij}^e \quad (2)$$

$$\text{où} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (3)$$

sont les constants de Lamé et δ est le symbole de Kronecker.

En outre, on fait l'hypothèse complémentaire, dans les cas des critères Von Mises et Tresca, que les déformations plastiques se font sans changement de volume :

$$\epsilon_{ii}^p = \epsilon_{11}^p + \epsilon_{22}^p + \epsilon_{33}^p = 0 \quad (4)$$

2 - Existence des surfaces de plasticité

L'état de contraintes peut se représenter par un point dans l'espace à neuf dimensions des contraintes, de manière qu'il existe, en son voisinage, une zone où un accroissement des contraintes, $d\sigma_{ij}$, ne produit qu'un accroissement des déformations élastiques, $d\epsilon_{ij}^e$ ($d\epsilon_{ij}^p = 0$). La frontière de cette zone est la surface de plasticité (ou d'écoulement) initiale, laquelle on suppose exister. Elle est représentée par l'équation :

$$F_0(\sigma_{ij}) = 0 \quad (5)$$

Lorsque l'écrouissage se produit, cette surface change au fur et à mesure que les déformations plastiques progressent ; l'expression mathématique de ces surfaces de plasticité successives s'appelle la fonction de charge. Elle dépend de l'état de contraintes atteint σ_{ij} , de l'histoire des déformations plastiques ϵ_{ij}^p et de l'écrouissage (par l'intermédiaire d'un paramètre, k). En résumé :

$$F(\sigma_{ij} ; \epsilon_{ij}^p ; k) = 0 \quad \text{existe} \quad (6)$$

et telle que

$F < 0$: état élastique

$F = 0$: état plastique ; $d\sigma_{ij}$ peut provoquer $d\varepsilon_{ij}^p$;

$F > 0$: état inadmissible (sans signification).

La valeur spéciale $F = 0$ constitue la condition de plasticité à partir de laquelle on peut définir trois cas de chargements différents, pour une augmentation de sollicitation donnée. Soit dF la variation correspondante de la fonction de charge :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \cdot d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial F}{\partial K} dk \quad (7)$$

a) $dF < 0$; l'état atteint est élastique, donc $d\varepsilon_{ij}^p = 0$, $dk = 0$, on a un processus de déchargement.

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \quad F = 0 \quad \text{déchargement} \quad (8)$$

b) $dF = 0$, mais $d\varepsilon_{ij}^p = 0$ (donc $dk = 0$) ; ce processus, qui passe d'un état plastique à un autre sans variation des déformations plastiques, est appelé chargement neutre :

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\sigma_{ij} = 0, \quad F = 0 \quad \text{chargement neutre} \quad (9)$$

c) $dF = 0$, $d\varepsilon_{ij}^p = 0$, $dk = 0$; ce processus fait passer d'un état plastique à un autre avec variation des déformations plastiques et s'appelle chargement :

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0, \quad F = 0 \quad \text{chargement} \quad (10)$$

Ces trois possibilités sont illustrées par le schéma de la Fig. 3.

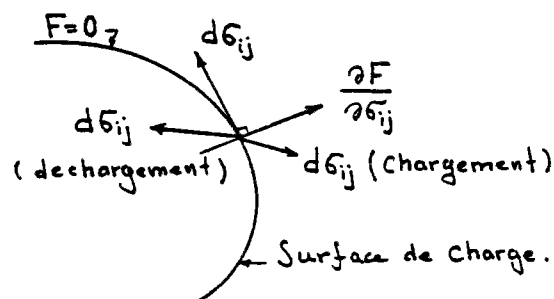


Fig. 3 - Chargement, chargement neutre et déchargement.

3 - Postulat de stabilité de Drucker

Ce postulat, qui est une formulation du principe "du travail maximal", s'énonce comme suit : soit σ_{ij} l'état de contraintes en un point d'un corps pour une sollicitation donnée ; par une cause extérieure distincte de cette sollicitation, un état de contraintes additionnel est appliqué puis retiré lentement ; alors, pendant l'application seule, ou pendant le cycle complet, l'agent extérieur fournit un travail non-négatif.

Soit σ_{ij}^* l'état de contraintes existant (Fig. 4) ; l'agent extérieur amène d'abord cet état sur la surface de plasticité au point σ_{ij} en suivant un chemin élastique. Puis il provoque un accroissement $d\sigma_{ij}$ des contraintes en domaine plastique (l'écrouissage est supposé non-négatif) produisant des déformations à la fois élastique et plastique ; enfin, il se retire et l'état de contraintes retourne au niveau σ_{ij}^* en suivant un chemin élastique. Dans ce cycle, le travail élastique est nul, de sorte que le travail de l'agent extérieur est :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\epsilon_{ij}^p + \sigma_{ij} \cdot d\epsilon_{ij}^p \geq 0. \quad (11)$$

Puisqu'on peut choisir $\sigma_{ij}^* \equiv \sigma_{ij}$, on a

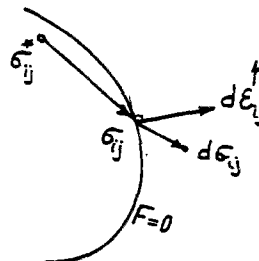
$$d\sigma_{ij} \cdot d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (12)$$

et puisque ce second terme est d'un ordre de grandeur inférieur au premier, ce dernier doit satisfaire à :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (13)$$

l'égalité ayant lieu pour le chargement neutre.

Fig. 4 - Postulat de Drucker.



Les inégalités (12) et (13) ont des conséquences fondamentales sur la théorie de la plasticité, car on peut en déduire la forme des équations constitutives recherchées. Deux propriétés principales se dégagent du postulat de Drucker :

a) Convexité : toute surface de plasticité $F = 0$ est connexe. Cela découle de 13 qui exprime que l'angle entre $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)$ et $d\epsilon_{ij}^p$ ne peut excéder 90° , le produit scalaire étant positif ou nul.

b) Normalité : le vecteur incrément des déformations plastiques est normal à la surface de plasticité. En effet, puisque $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)$ ne peut être situé que d'un seul côté d'un hyperplan perpendiculaire à $d\epsilon_{ij}^p$ (Eq. 13), cet hyperplan est tangent à F , et $d\epsilon_{ij}^p$ est donc perpendiculaire à F . Par ailleurs, l'incrément de déformations plastiques est indépendant de l'incrément de contraintes $d\sigma_{ij}$.

Cette propriété de normalité se traduit par l'équation suivante :

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{avec } d\lambda \geq 0 \quad (14)$$

où $d\lambda$ est un facteur de proportionnalité qui, en raison de l'inégalité 3, est non-négatif. Cette relation fondamentale s'appelle loi de normalité ou loi d'écoulement plastique. On dit aussi que F est la fonction potentielle plastique.

Notons que le postulat de Drucker n'est pas toujours conforme à la réalité physique et par conséquent ne peut être considéré que comme une hypothèse ; de sorte que toute autre hypothèse vérifiée expérimentalement est tout aussi valable. Ainsi, pour certains matériaux dont les déformations plastiques n'obéissent pas à la loi de normalité, on suppose qu'il existe un potentiel plastique G (différent de F) auquel s'applique la loi de normalité :

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad (15)$$

on l'appelle la loi d'écoulement non associée.

Connaissant la surface de plasticité (ou la fonction de charge, F) la loi de normalité nous permet d'établir l'expression générale des équations constitutives incrémentales :

$$d\epsilon_{ij} = H_{ijkl} \cdot d\sigma_{kl} + d\lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (16)$$

Critère de plasticité

On appelle critère de plasticité une loi qui définit explicitement la forme de la surface de plasticité.

Loi d'écrouissage

On appelle loi d'écrouissage une loi qui décrit explicitement la forme de la fonction de charge ou, en d'autres termes, qui définit l'évolution des surfaces de plasticité successives. Les deux lois pratiquement utilisables sont :

a) la loi d'écrouissage isotrope, qui suppose essentiellement que la fonction de charge est obtenue par une expansion uniforme de la surface de plasticité dans tous les sens. Cette loi est en contradiction avec l'effet de Bauschinger, et conserve l'isotropie.

b) la loi d'écrouissage cinématique linéaire, qui suppose essentiellement que la fonction de charge garde la même forme que la surface de plasticité initiale, mais elle se déplace par translation dans l'espace de contraintes. Cette loi introduit partiellement l'effet de Bauschinger, ainsi que l'anisotropie due aux déformations plastiques.

La loi d'écrouissage du critère de Von Mises, appliquée par Programme Rosalie, est une loi isotrope : l'isotropie du matériau est conservée ; quel que soit le chemin suivi dans l'espace des déformations pour atteindre un état de contraintes, la fonction de charge finale est la même.

Ainsi, la fonction de charge a la même forme que le critère de plasticité initial et seule la constante k devient fonction d'une certaine mesure de l'écrouissage ; la détermination expérimentale de cette fonction est indépendante de la sollicitation : on peut l'obtenir, par exemple, à l'aide d'un essai uniaxial.

Les hypothèses de la loi d'écrouissage isotrope conduisent, géométriquement, à une expression de surface de charge initiale (homothétie). On peut donc écrire :

$$F(\sigma_{ij} ; \varepsilon_{ij}^p ; k) = 0 \rightarrow F(\sigma_{ij} ; K) = F(\sigma_{ij}) - F'(K) \quad (17)$$

où la dépendance de F' vis-à-vis de ε_{ij}^p est en effet maintenue par l'intermédiaire de K qui dépend de l'histoire des déformations plastiques.

Pour mesurer l'écrouissage afin de donner une formule explicite pour $F'(K)$, on peut faire deux hypothèses :

a) hypothèse du travail de déformation plastique :

$$dK \equiv dW^p = \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}^p \quad \text{avec} \quad W^p = \int_0^{\varepsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}^p \quad (18)$$

($W^p \geq 0$)
et on pose $F(K) = f_1(W^p)$

b) hypothèse de l'incrément de déformation plastique de comparaison ; on définit :

$$dK \equiv d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p \cdot d\varepsilon_{ij}^p \quad \text{avec} \quad \bar{\varepsilon}^p = \int_0^{\varepsilon_{ij}^p} d\bar{\varepsilon}^p \quad (19)$$

et on pose $F(K) = f_2(\bar{\varepsilon}^p)$

Pour le critère en question (Von Mises) ces deux définitions sont équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe une relation de la forme :

$$W^p = f_3(\bar{\varepsilon}^p)$$

entre les deux mesures de l'écrouissage : W^p et $\bar{\varepsilon}^p$.

Critère de Tresca (1864)

$$F(\sigma_{ij}) = |\sigma_1 - \sigma_3| - 2K = 0 \quad (20)$$

où σ_1 et σ_3 sont les contraintes principales extrêmes ; K est la résistance au cisaillement simple.

Selon le critère de Tresca, la plasticité n'a lieu que lorsque la contrainte de cisaillement maximale atteint la valeur de K , ce dernier étant une constante (plasticité idéale) ou fonction des déformations plastiques (plasticité avec écrouissage). La version actuelle du Groupe 5 ne s'applique qu'au cas de plasticité idéale et en déformation plane.

Dans l'espace des contraintes principales, la surface de plasticité est un prisme, parallèle à l'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, dont la section avec le plan ($\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$) est un hexagone régulier de centre $(0, 0, 0)$ - Fig. 7.

La contrainte principale ne joue aucun rôle dans les critères de Coulomb et de Tresca.

Critère de Coulomb (1773)

Le premier critère de plasticité en mécanique des sols, le critère de Coulomb, se présente dans le plan de Mohr (τ , σ) par deux droites de l'équation suivante :

$$F(\sigma_{ij}) = |\sigma_1 - \sigma_3| + \sin \phi (\sigma_1 + \sigma_3 - 2 C \cotg \phi) = 0 \quad (21)$$

où σ_1 et σ_3 sont les contraintes principales extrêmes (positives en traction) ;

ϕ est l'angle de frottement interne et C la cohésion.

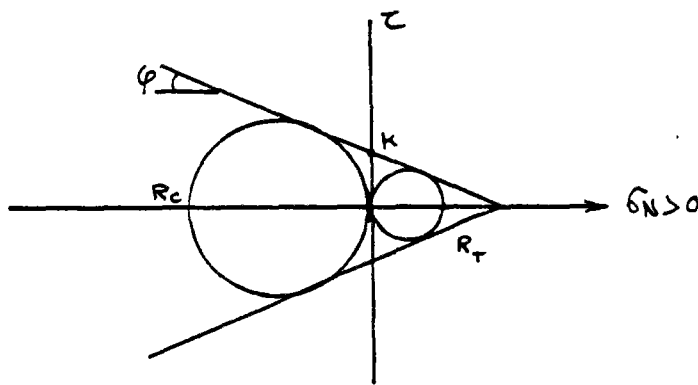


Fig. 5 - Courbe intrinsèque COULOMB et DRUCKER

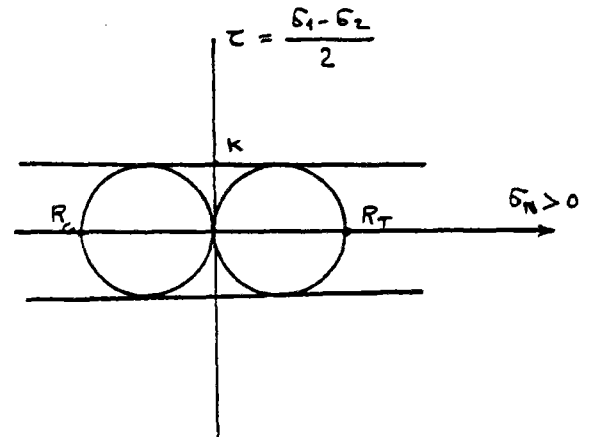


Fig. 6 - Courbe intrinsèque TRESCA et MISES

Dans l'espace des contraintes principales ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) la surface de plasticité est une pyramide de base hexagonale et d'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (Fig. 7).

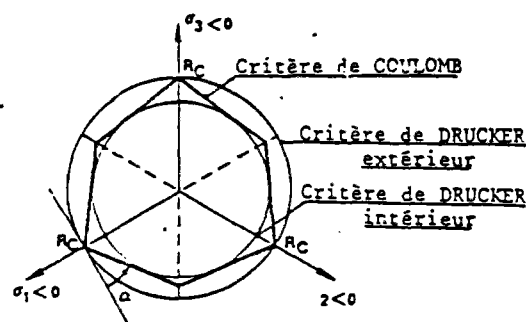


Fig. 7 - Section par le plan P; $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}(1+\sin \phi)}{3 - \sin \phi}$.

Critère de Von Mises (1913)

La surface de plasticité initiale est une fonction uniquement du deuxième invariant du tenseur déviatorique, J_2 :

$$F_2(\sigma_{ij}) = J_2^{1/2} - K = 0 \quad (22)$$

avec $J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$ où $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} S_{ij}$ (23)

ou $J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$ (24)

Dans un essai de cisaillement où $\sigma_2 = \sigma_3$, $\frac{K\sqrt{3}}{2}$ est la résistance au cisaillement.

Dans l'espace $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, la surface de plasticité forme un cylindre de révolution de l'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Fig. 8.

Lorsqu'il s'agit d'un matériau écrouissable, K n'est plus constant mais il dépend des déformations plastiques.

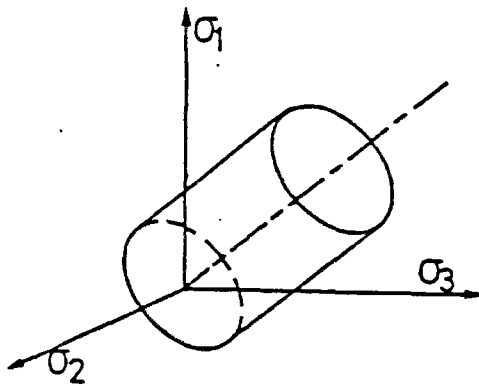
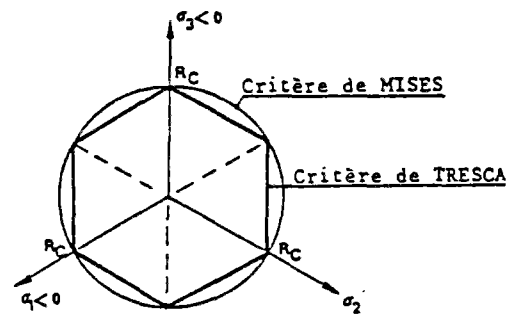


Fig. 8 - Représentation du critère de Von Mises dans l'espace $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.



9 - Section du critère par le plan P

Critère de Drucker et Prager (1952)

Selon ce critère, la surface de plasticité est une fonction à la fois de J_2 et de la contrainte hydrostatique :

$$F(\sigma_{ij}) = J_2^{1/2} + \alpha I_1 - K = 0 \quad (25)$$

où $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\bar{\sigma}_0$, $\bar{\sigma}_0$ étant la contrainte moyenne ; α et K sont des constantes.

La surface de plasticité est un cône dont le sommet se trouve sur l'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ suivant les valeurs que l'on attribue à α et K , on peut obtenir une surface de plasticité "équivalente" à celle d'un critère de Coulomb donné. Ainsi en choisissant :

$$\alpha = \frac{\operatorname{tg} \phi}{(9 + 12 \operatorname{tg}^2 \phi)^{1/2}} \quad (26)$$

$$\text{et } K = \frac{3C}{(9 + 12 \operatorname{tg}^2 \phi)^{1/2}}$$

on obtient une surface de plasticité inscrite dans la surface de plasticité de Coulomb dont les constantes sont : ϕ et C (Fig. 7). De la même manière, il est possible d'établir la fonction de charge d'un critère de Drucker-Prager extérieur. C'est la première équivalence qui est choisie par le programme Rosalie, c'est-à-dire que les paramètres donnés sont l'angle de frottement interne et la cohésion à partir desquels le programme établit, automatiquement, le critère inscrit correspondant.

Critère parabolique

R_T et R_C étant respectivement la résistance à la traction et à la compression, la surface de plasticité, dans l'espace $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, est un paraboloïde de révolution dont le sommet est sur $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ et qui coupe les demi-axes $\sigma_i > 0$ en R_T et $\sigma_i < 0$ en $-R_C$ (Fig. 11).

$$F(\sigma_{ij}) = J_2 + \frac{1}{3} (R_C - R_T) I_1 - \frac{1}{3} R_C R_T \quad (27)$$

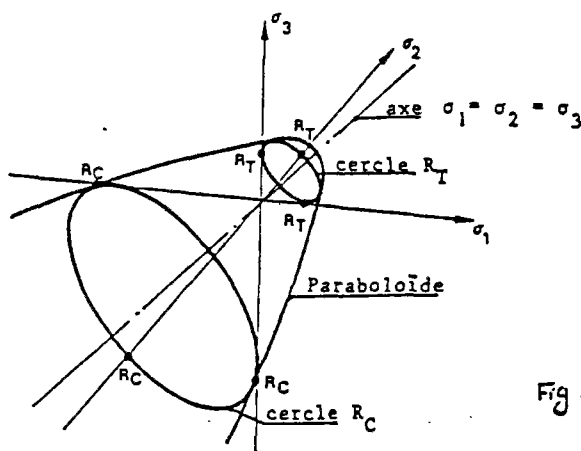


Fig. 11 Critère parabolique

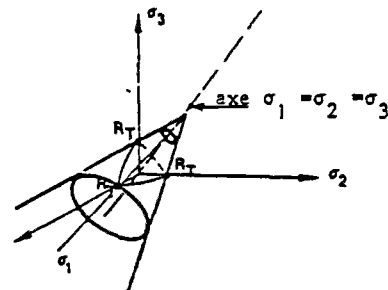


Fig. 10 Critère de DRUCKER dans les axes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

Le sommet du paraboloïde a pour coordonnées :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{1}{3} \frac{R_c R_T}{R_c + R_T}$$

Lois constitutives élastoplastiques incrémentales

Dans une forme plus générale, la fonction de charge des critères précédents se présente par $F(\sigma_{ij}, k)$ dans laquelle, k , le paramètre d'écrouissage, est une fonction des déformations plastiques. Suivant la loi de normalité, les équations générales d'élastoplasticité s'écrivent :

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (28)$$

$$d\epsilon_{ij}^e = H_{ijkl} d\epsilon_{kl} \quad \text{ou} \quad d\epsilon_{ij} = E_{ijkl} d\epsilon_{kl} \quad (29)$$

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial F(\sigma_{ij}, k)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (30)$$

pour un chargement :

$$F(\sigma_{ij}, k) = 0$$

$$dF = 0.$$

Le seul inconnu est le scalaire positif $d\lambda$ que l'on calcule de la manière suivante :

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right]^T d\sigma + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad (31)$$

$$d\sigma = E (d\epsilon - d\epsilon^p)$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right]^T d\sigma = \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right]^T E d\epsilon - \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right]^T E d\lambda \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right] = - \frac{\partial F}{\partial k} dk$$

$$\text{On met :} \quad A d\lambda = - \frac{\partial F}{\partial k} dk \quad (32)$$

et on obtient :

$$d\lambda = \frac{\left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right]^T E d\epsilon}{A + \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right]^T E \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right]} \quad (33)$$

La méthode de résolution numérique

Comme nous l'avons écrit précédemment (§3.5.1), l'équilibre, sous charges statiques, du corps chargé conduit au système d'équations

$$[F] = [R] \cdot [U] \quad (34)$$

où $[R]$ est la matrice de rigidité de la structure, $[U]$ le vecteur de déplacements (généralisés) nodaux et $[F]$ celui des forces appliquées. Cette équation exprime en effet l'équilibre des noeuds.

Les lois constitutives du matériau interviennent dans l'élaboration de la matrice $[R]$; ces lois dépendent, dans un problème élastoplastique, de l'histoire des déformations ϵ_{ij} , ou, de la manière générale, des déplacements $[U]$. L'Eq. 34 s'écrit donc :

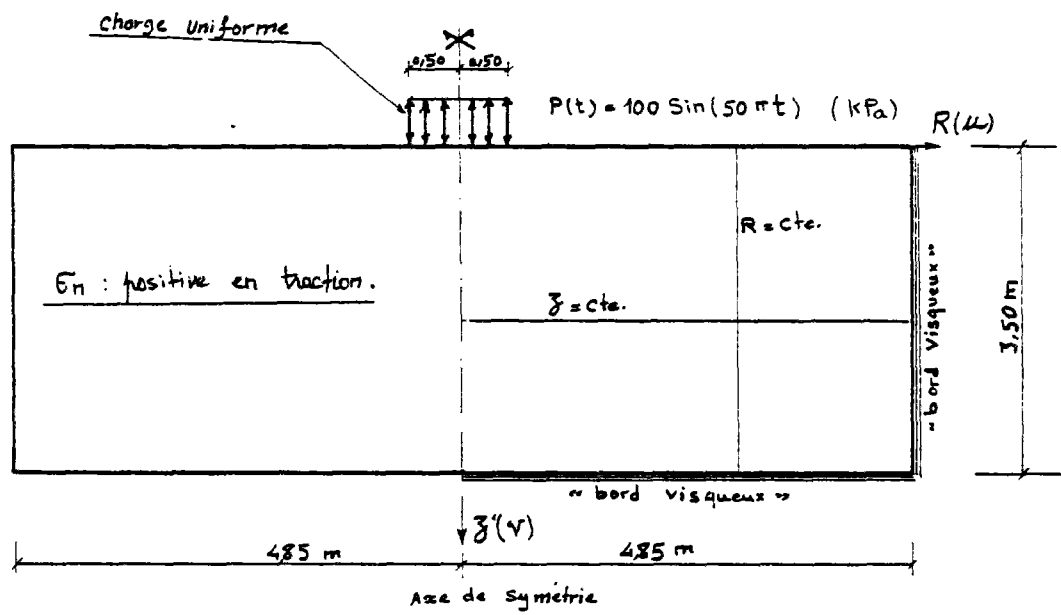
$$[F] = [R(U)] \cdot [U] \quad (35)$$

et représente ainsi un système d'équations non-linéaires. On doit donc utiliser une méthode incrémentale, dont le principe est de résoudre une forme incrémentale des équations d'équilibres (35) par application des incréments de sollicitation. En effet, le but de la méthode incrémentale est la linéarisation des équations (35).

Le nombre d'incrémentes des sollicitations est choisi par l'utilisateur du programme ; par ailleurs à chaque incrément de la charge, le programme effectue un certain nombre d'itérations pour faire converger la solution approchée vers la solution exacte. La méthode utilisée s'appelle méthode des contraintes initiales (modifiée) qui est analogue à celle de Newton-Raphson. C'est une méthode correctrice qui obtient en tout point $F(\sigma_{ij}, k) \leq \text{SUPCRI}$, SUPCRI étant la tolérance maximale de la convergence ($F = 0$) fixée, elle aussi, par l'utilisateur.

ANNEXE 3

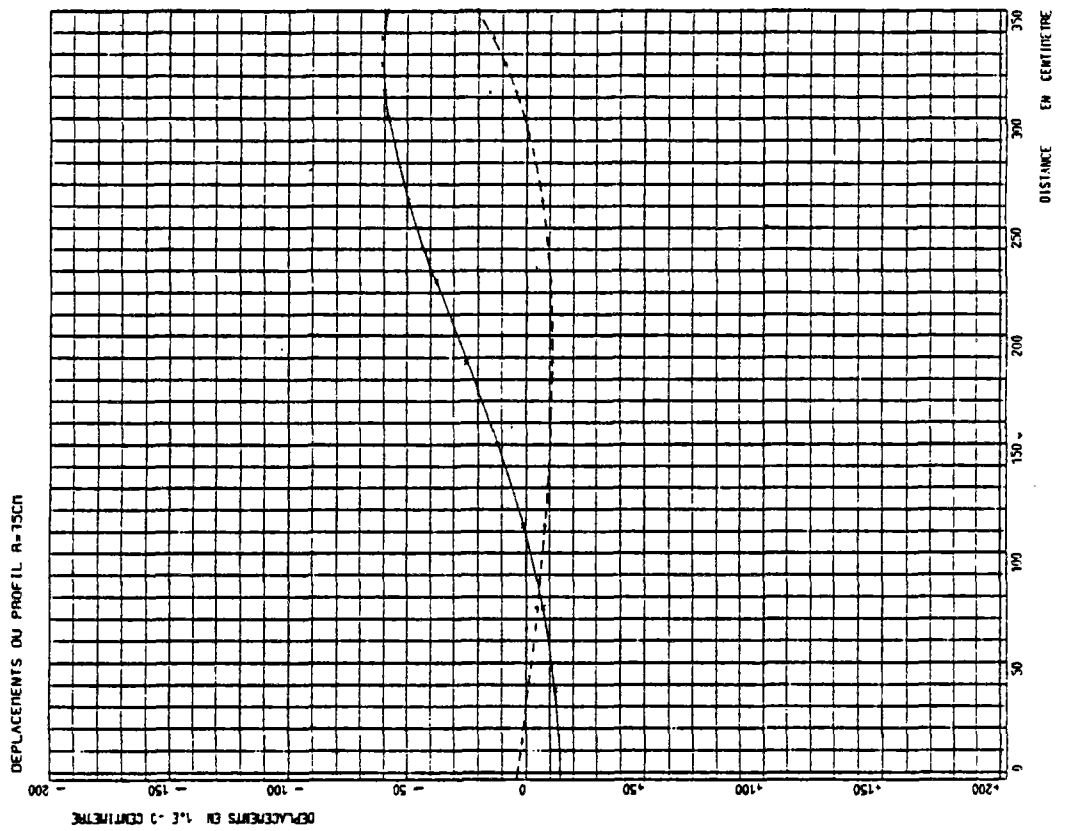
ETATS DE CONTRAINTES ET DE DEPLACEMENTS A
L'INSTANT $t = T$ DANS LE MODELE SIMULANT LE
SEMI-ESPACE ELASTIQUE



CHARGE UNIFORME $P=1\text{M}\sin(6.28\cdot 25T), R=50\text{CM}$

$P=100, E=50000\text{KPA}, R=50\text{CM}, CP=.25, VS=103\text{M/S}$ PAS DE TEMPS NO28

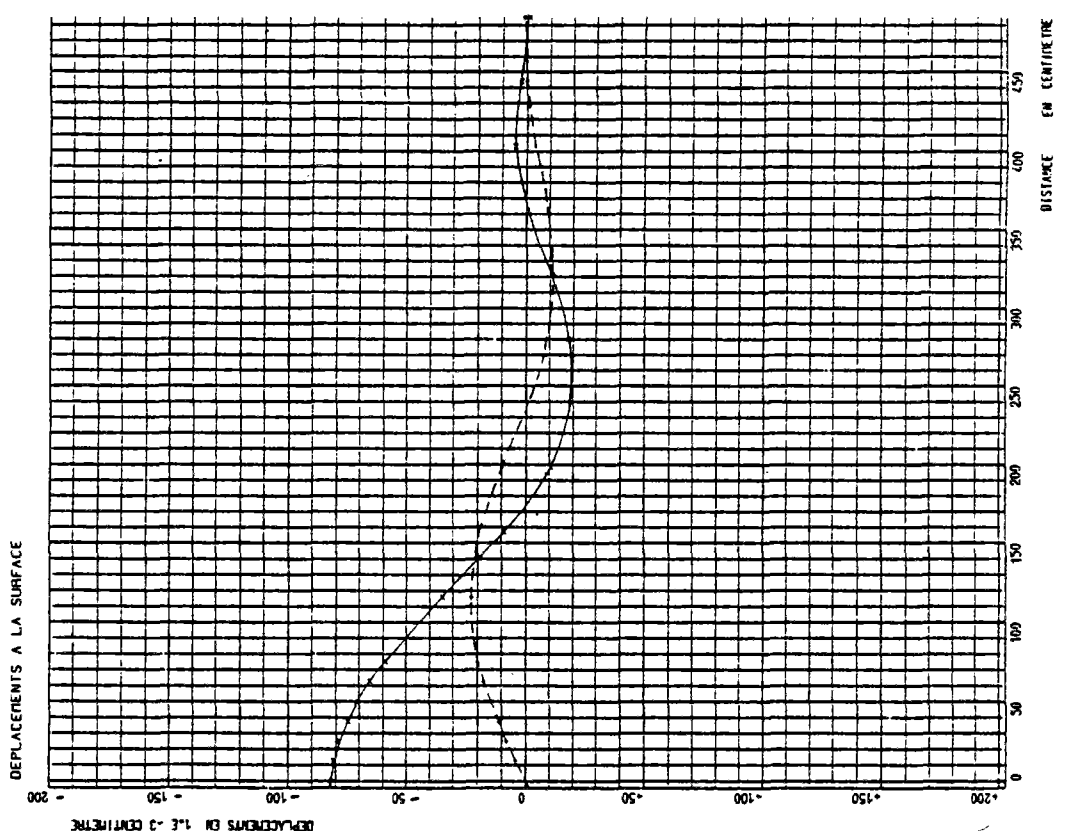
--- + U S1 SM
--- X V S2 S2
--- A S1 S1
--- O S2 S2



CHARGE UNIFORME $P=1\text{M}\sin(6.28\cdot 25T), R=50\text{CM}$

$P=100, E=50000\text{KPA}, R=50\text{CM}, CP=.25, VS=103\text{M/S}$ PAS DE TEMPS NO28

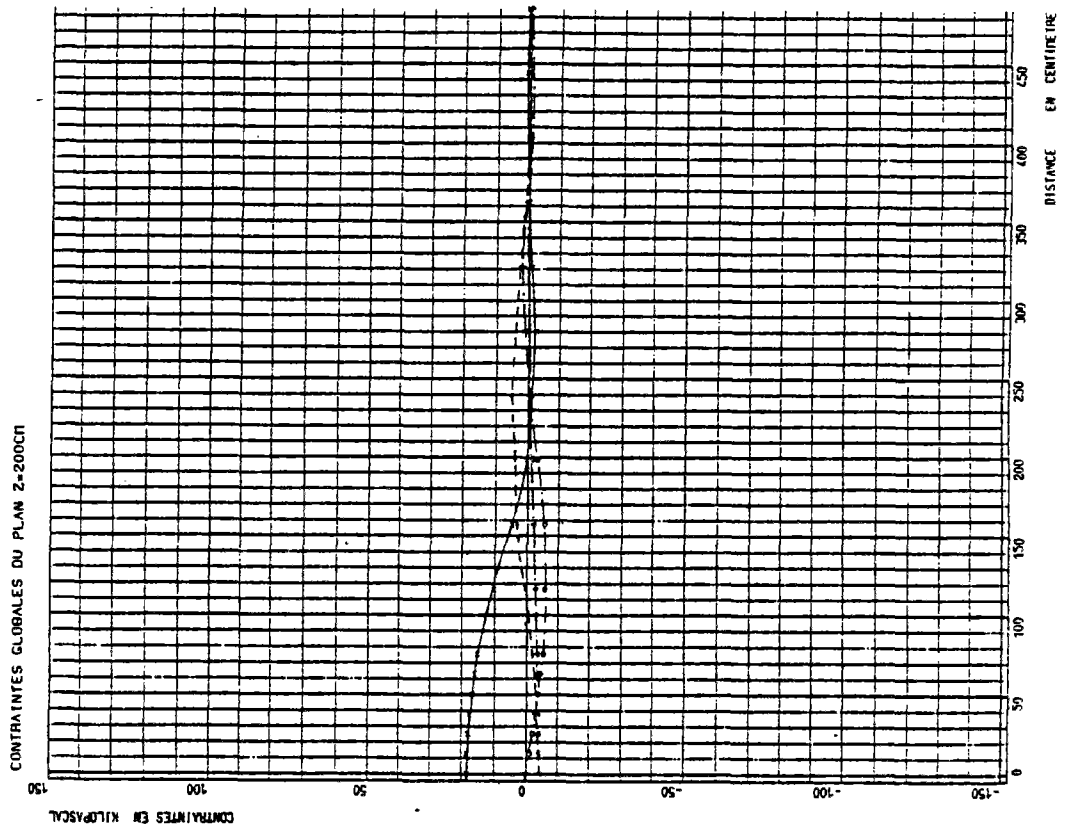
--- + U S1 SM
--- X V S2 S2
--- A S1 S1
--- O S2 S2



CHARGE UNIFORME $P=1 \times \sin(6.28 \times 25T), R=50 \text{ CM}$

$P=100, E=50000 \text{ KPA}, R=50 \text{ CM}, CP=.25, US=105 \text{ M/S}$ PAS DE TEMPS NO 48

---+--- U S1 SR
---X--- V S2 S2
---Δ--- Δ ST ST
---O--- O SR2

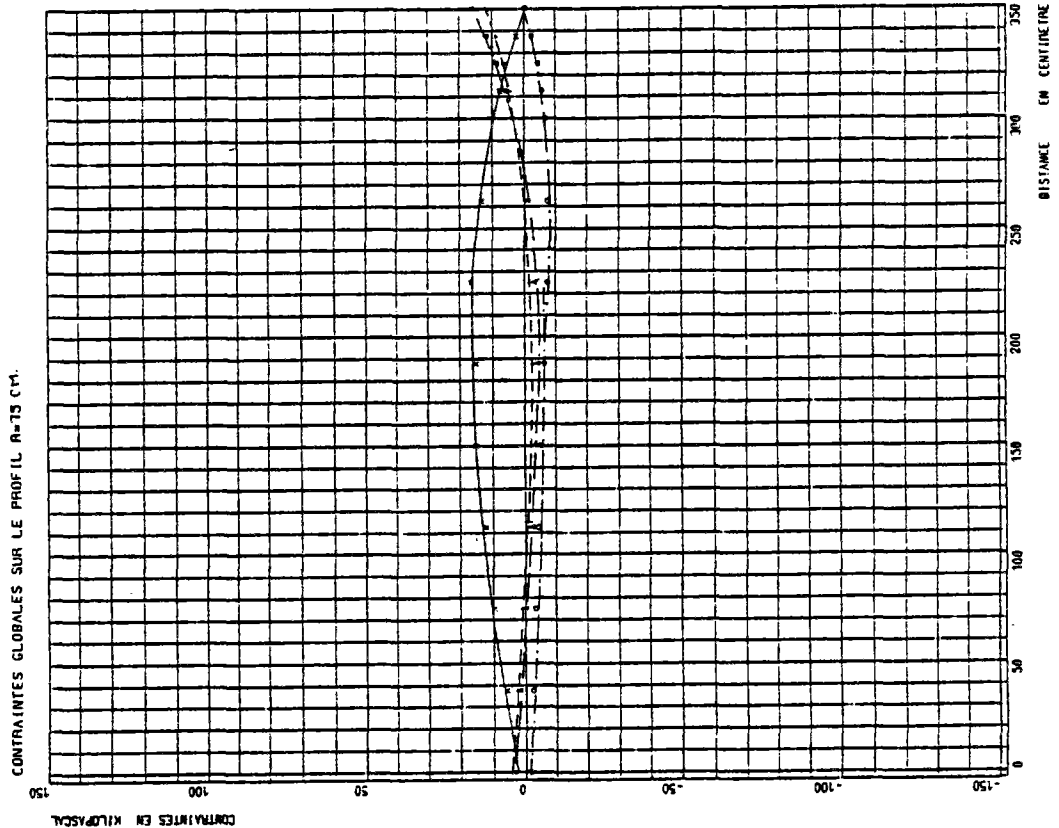


905AL11-TRACED9

CHARGE UNIFORME $P=1 \times \sin(6.28 \times 25T), R=50 \text{ CM}$

$P=100, E=50000 \text{ KPA}, R=50 \text{ CM}, CP=.25, US=105 \text{ M/S}$ PAS DE TEMPS NO 48

---+--- U S1 SR
---X--- V S2 S2
---Δ--- Δ ST ST
---O--- O SR2



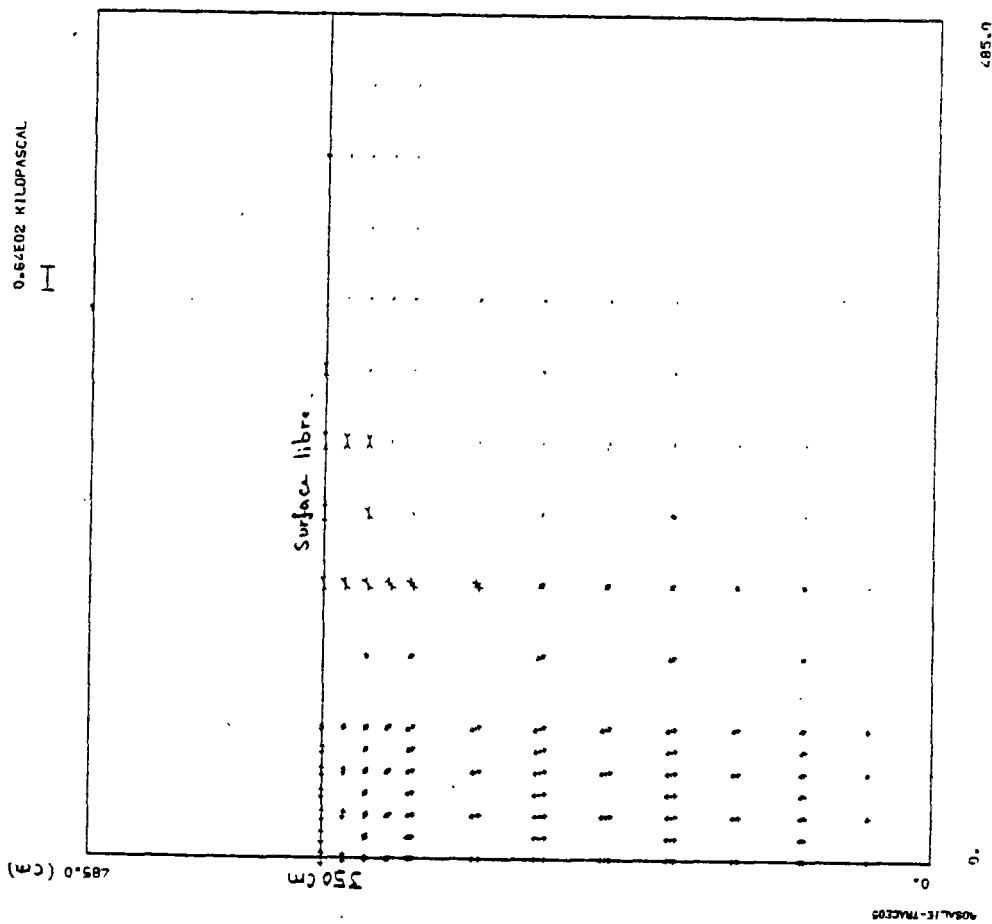
905AL11-TRACED3

CHARGE UNIFORME $P=1\sin(6.28 \times 25T)$, $R=50\text{CM}$

$P=100$, $E=50000\text{KPA}$, $R=50\text{CM}$, $CP=.25$, $US=105\text{N/S}$ PAS DE TEMPS N048

CONTRAINTES PRINCIPALES

CONTRAINTES PRINCIPALES



CHARGE UNIFORME $P=1\sin(6.28 \times 25T)$, $R=50\text{CM}$

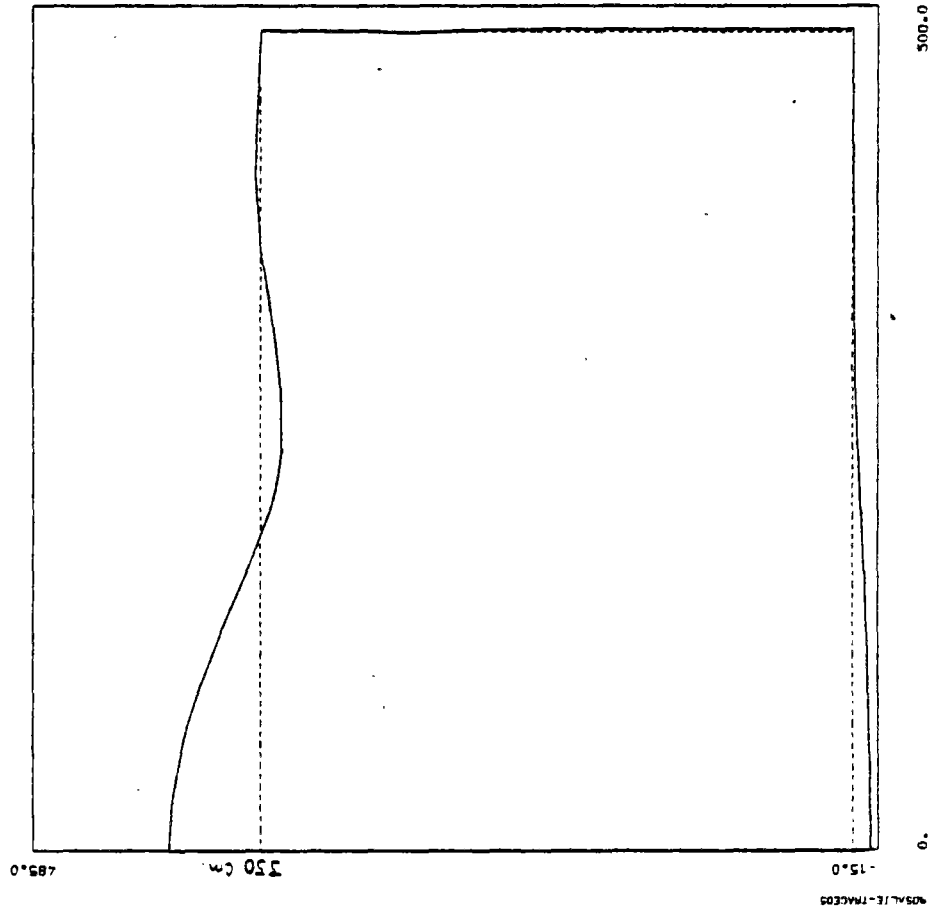
$P=100$, $E=50000\text{KPA}$, $R=50\text{CM}$, $CP=.25$, $US=105\text{N/S}$ PAS DE TEMPS N048

LA DEFORMEE DU SOL

DEFORMEE DU CONTOUR

CONTOUR INITIAL

0.06E00 CENTIMETRE

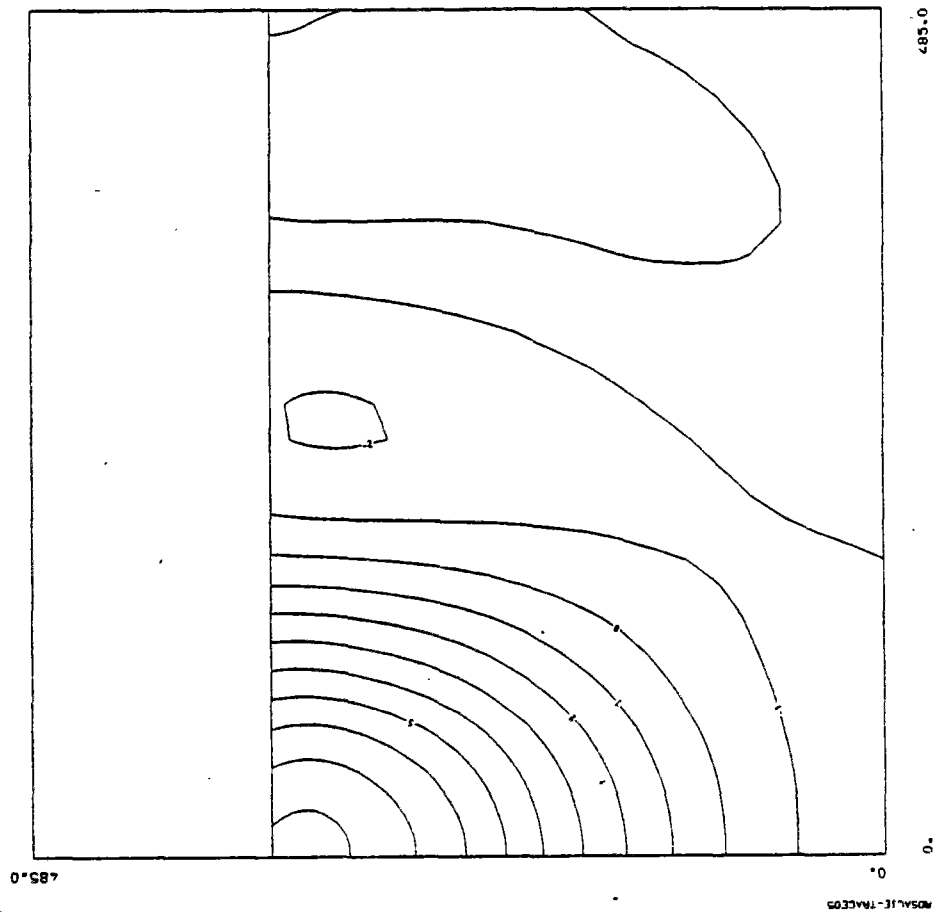


CHARGE UNIFORME $P=1 \times \sin(6.28 \times 25T)$, $R=50\text{CM}$

$P=100$, $E=50000\text{KPA}$, $R=50\text{CM}$, $CP=.25$, $US=105\pi/S$ PAS DE TEMPS NO.8

ISOVALEURS DE DEPLACEMENT VERTICAL

DEPLACEMENT VERTICAL (U) EN 0.01000 CENTIMETRE

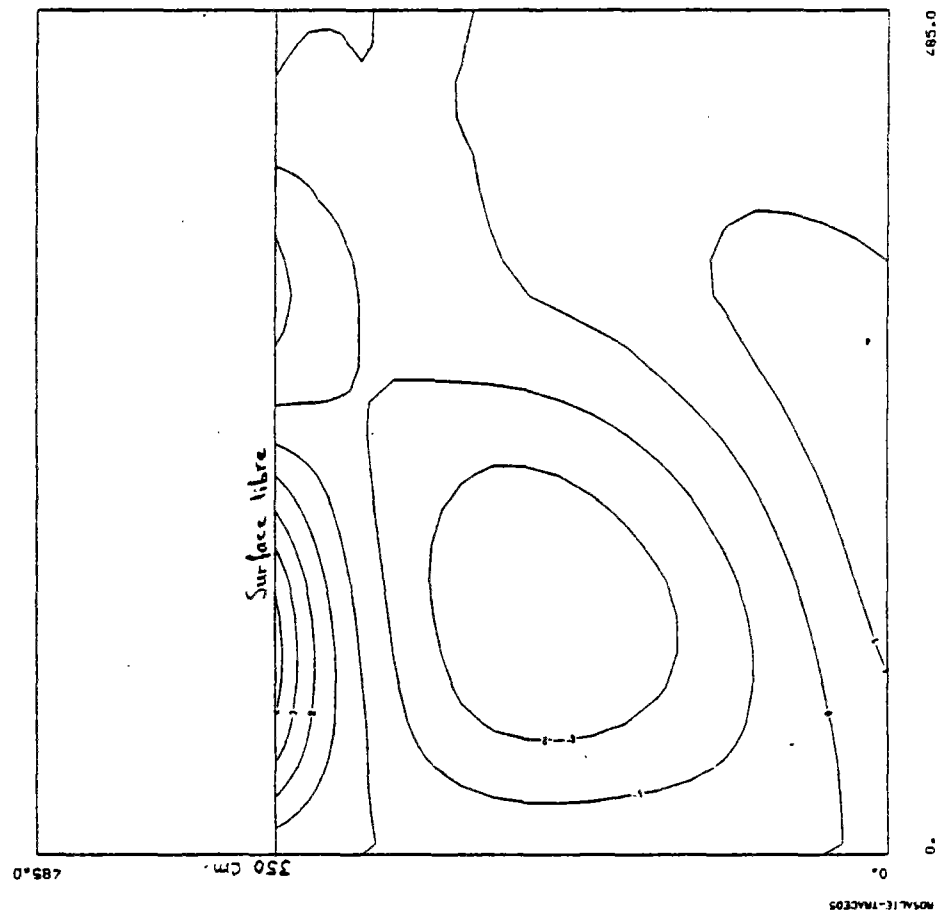


CHARGE UNIFORME $P=1 \times \sin(6.28 \times 25T)$, $R=50\text{CM}$

$P=100$, $E=50000\text{KPA}$, $R=50\text{CM}$, $CP=.25$, $US=105\pi/S$ PAS DE TEMPS NO.8

ISOVALEURS DE DEPLACEMENT HORIZONTAL

DEPLACEMENT HORIZONTAL (U) EN 0.30E-02 CENTIMETRE

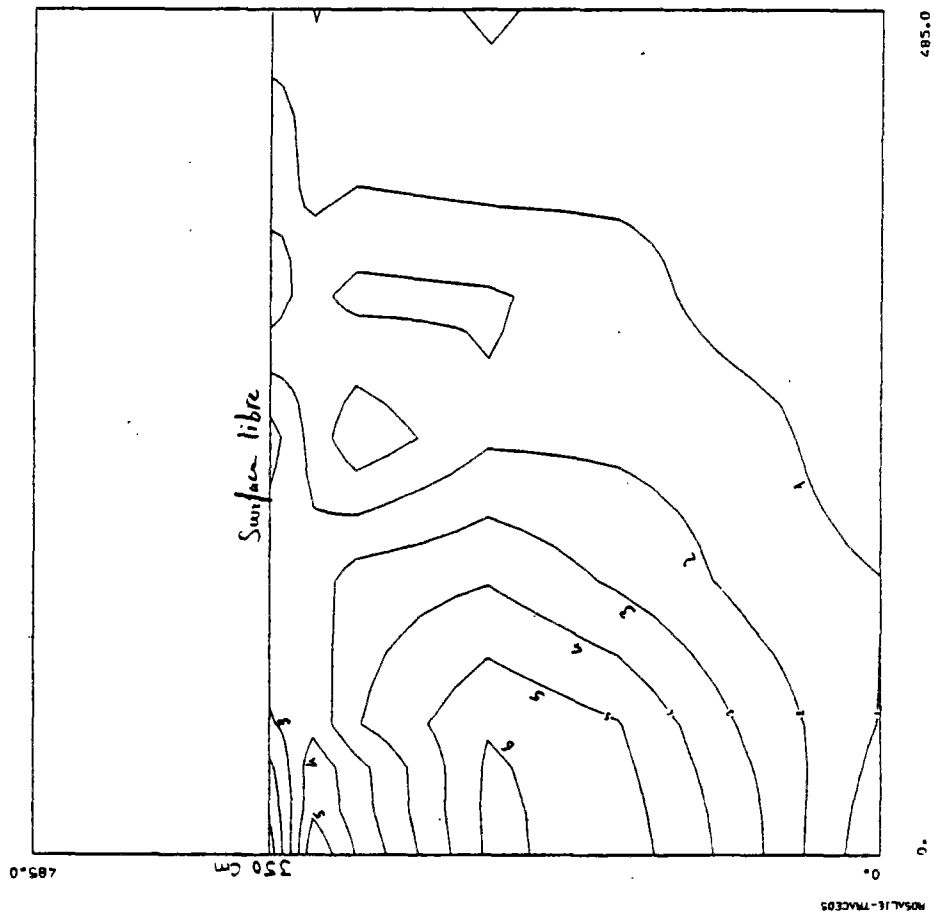


CHARGE UNIFORME $P=1 \times \sin(6.28 \times 25T)$, $R=50\text{CM}$

$P=100$, $E=30000\text{KPA}$, $R=50\text{CM}$, $CP=.25$, $US=105\text{N/S}$ PAS DE TEMPS NO48

ISOVALEURS DE CISAILLEMENT MAXIMUM

CISAILLEMENT MAXIMUM (S1-S2)/2) EN $0.20\text{E}01$ KILOPASCAL

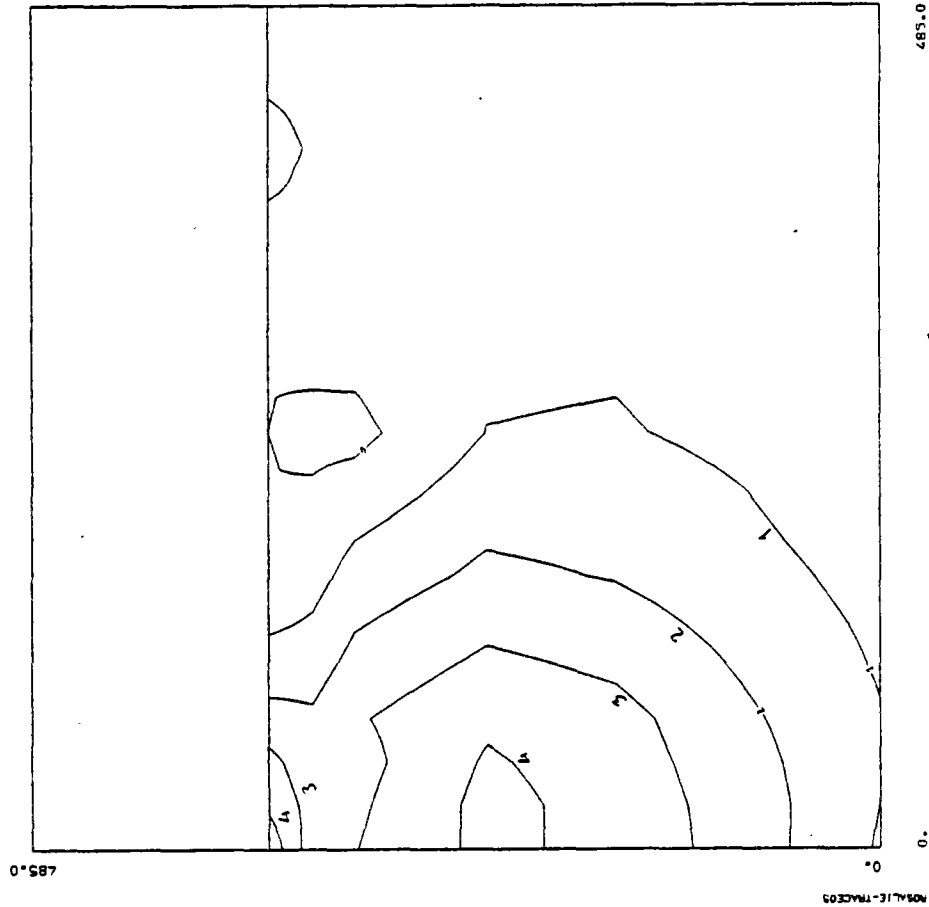


CHARGE UNIFORME $P=1 \times \sin(6.28 \times 25T)$, $R=50\text{CM}$

$P=100$, $E=30000\text{KPA}$, $R=50\text{CM}$, $CP=.25$, $US=105\text{N/S}$ PAS DE TEMPS NO48

ISOVALEURS DE CONTRAINTE PRINCIPALE S1

CONTRAINT PRINCIPALE MAXIMUM (S1) EN $0.30\text{E}01$ KILOPASCAL



B I B L I O G R A P H I E

- [1] Arnold R.N., Bycroft G.N., Warburton G.B. (1955), *Forced vibrations of a Body on an infinite Elastic Solid*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Vol. 77, p. 391-401.
- [2] Arquie G., (1970), *Le compactage : routes et pistes*, Eyrolles.
- [3] Arquie G., Machet J.-M., Morel G., 1976, *Compactage des assises de chaussées, choix du matériel et de ses modalités d'emploi*, B.L., L.C.P.C., N° 86, nov.-déc.
- [4] Avramesco A., (1965), *Quelques notions théoriques relatives à la dynamique des chaussées*, Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, N° 14, juillet-août.
- [5] Avramesco A., (1965), *Utilisation en mécanique des chaussées du vibreur Goodman*, Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, N° 14, juillet-août.
- [6] Barbas A., (1981), *Contribution à l'utilisation de la méthode des éléments finis en mécanique des sols dans le domaine de l'élasto-plasticité*, Thèse de docteur-ingénieur, E.N.P.C., Paris, mars.
- [7] Barkan D.D., (1962), *Dynamics of bases and foundations*, Mac-Graw Hill.
- [8] Barkan D.D., (1963), *Méthodes de vibration dans la construction*, (Traduit du russe par B. Catoire), Ed. Dunod, Paris.
- [9] Bathe K.-J., Wilson E.L., (1976), *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc., 528 P.
- [10] Boussinesq H., (1885), *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, Gauthier Villars, Paris.
- [11] Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, Spécial B, (1965), *Essais de plaques et mécanique des chaussées*, L.C.P.C., Paris, février.
- [12] Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, Spécial J., (1968), *Utilisation du vibreur Goodman en auscultation des chaussées*, L.C.P.C., Paris, juillet.
- [13] Bycroft G.N., (1956), *Forced Vibrations of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and on a elastic stratum*, Philosophical Trans., Royal Society, London, ser. A., Vol. 248, p. 327-368.
- [14] California Institute of Technology, *Vibration compaction of cohesive soils*, (1954).
- [15] California Institute of Technology, *Vibration compaction of sand*, (1952).

- [16] California Institute of Technology, *An investigation of the compaction of soil by vibration*, (1950).
- [17] Cambefort H., (1976), *Eléments de rhéologie en mécanique des sols*, Annales I.T.B.T.P., Sol. et Fond., N° 129.
- [18] Catoire B., (1966), *Etude de compactage des sols par vibration superficielle*, Construction, t. XXI N° 5, 6 et 7.
- [19] Chaigne P., Leflaive E., Oczkowski J., Franceschina R., Morel G., Quibel A., (1973), *Compactage des terrassements - Efficacité en profondeur de trois rouleaux vibrants*, Rapport de recherche N° 24, L.C.P.C.
- [20] Chaigne P., Oczkowski J., Franceschina R., MOREL G., Quibel A., (1974); *Compactage des terrassements - Compactage en grande épaisseur au moyen des rouleaux vibrants lourds et d'un compacteur à pneus lourd*, Rapport de recherche N° 33, L.C.P.C.
- [21] Chaigne P., Franceschina R. Oczkowski J. Quibel A., (1977), *Compactage des terrassements - Efficacité en profondeur de plaques et de rouleaux vibrants et influence de l'épaisseur des couches sur la qualité du compactage*, Rapport de recherche N° 70, L.C.P.C.
- [22] Courbon J., (1964), *Résistance des matériaux*, Tomes I et II, Dunod.
- [23] Cundall P.A., Kunar R.R., Carpentier P.C., Marti J., (1978), *Solution of infinite dynamic problems by finite modelling in the time domain*, Proc. 2nd Int. Conf. Appl. Num. Modelling, Madrid.
- [24] D'Appolonia E., (1968), *Densification of granular soil by vibrations*, The University of Michigan, Eng. summer conf. on vibration of soils and foundations.
- [25] D'Appolonia D.J., Whitman R.V., D'Appolonia E., (1969), *Sand compaction with vibratory rollers*, Proc. A.S.C.E., vol. 95, SM1, January.
- [26] Degraeve F., (1980), *Optimisation des performances d'un compacteur vibrant par ajustement automatique de la fréquence*, Colloque international sur le compactage, Paris, avril, vol. II, p. 627-631.
- [27] Desai C.S., Abel J.F., (1972), *Introduction to the finite element method*, Van Nostrand Reinhold Company, 477 p.
- [28] Elorduy J., Nieto J.A., Szekely E.M., (1967), *Dynamic Response of arbitrary shape subjected to periodic vertical loading*, Proc. International Symposium on wave propagation and dynamic properties of earth materials, Albuquerque, N.M., aug.
- [29] Ermolaev N.N., (1968), *Vibrocompression of soils*, S.M.F.E., juillet-août (cité dans [48]).
- [30] Ewing W., Jardetsky W., Press F., (1957), *Elastic waves in layered media*, Mac Graw-Hill, New-York.
- [31] Forssblad L., (1965), *Investigations of soil compaction by vibration*, Acta Polytechnica Scandinavia, civil eng. and building construction series N° 34, Ci 34, UDC 624.138.22, Royal swedish Acad. of Eng. Sciences, Stockholm.
- [32] Frémond M., (1968), *Calcul des déflexions d'une structure stratifiée élastique soumise à des charges mouvantes*, Annales des Ponts et Chaussées, juillet-août.
- [33] Frémond M., (1971), *Etude de structures viscoélastiques stratifiées soumises à des charges harmoniques et de solides élastiques reposant sur ces structures*, Thèse de docteur-ès-sciences, Université Paris VI, juin.
- [34] Frémond M., (1980), *Méthodes variationnelles en calcul des structures*, Cours de l'Ecole nationale des ponts et chaussées, Paris.
- [35] Frey F., (1973), *Le calcul élastoplastique des structures par la méthode des éléments finis et son application à l'état plan de contrainte*, Rapport N° 33, S.R.M.S.C., Université de Liège.
- [36] Fung J.C., (1965), *Foundations of solid mechanics*, Prentice-Hall.
- [37] Giroud J.P., (1975), *Tassement et stabilité des fondations superficielles*, Presses Iniversitaires de Grenoble, Tome 1.
- [38] Guellec P., (1976), *Rosalie - Système de calcul des massifs et des structures*, Rapport du Département Géotechnique, N° 1.09.14.6, L.C.P.C., Paris.

- [39] Guellec P., (1976), *La méthode des éléments finis appliquée au calcul des massifs et des structures*, Document de base de la programmation de Rosalie, L.C.P.C., Paris.
- [40] Guellec P., Humbert P., Ricard A., (1976), *La méthode des éléments finis et le système Rosalie*, Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, N° 81, réf. 1801.
- [41] Guellec P., Ricard A., (1974), *Calcul de massifs en élastoplasticité, Applications à la mécanique des roches et des sols*, Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, N° 69, réf. 1397.
- [42] Hardin B.O., Drnevich P., (1972), *Shear Modulus and Damping in soils : measurement and parameter effects*, Proc. A.S.C.E., Soil Mech. & Found. Div., S.M. 6, june.
- [43] Hardin B.O., (1965), *The nature of damping in sands*, J. Soil Mech. and Found. Div., Proc. A.S.C.E., Vol. 91, SM 1, p. 63-97.
- [44] Hsieh T.H., (1962), *Foundation vibrations*, Proc. Institution of civil engineers, vol. 22, p. 211-226 (cité dans [75]).
- [45] Hundal M.S., (1979), *Response of a base excited system with Coulomb and Viscous friction*, J. of sound and vibration, 64(3), p. 371-378.
- [46] Khay M., (1978), *Comportement des matériaux d'assises de chaussées au compactage, Essais de laboratoire, essais en fosse*, Compte rendu, C.E.R., juillet.
- [47] Khay M., (1980), *Compactabilité des matériaux - Méthodologie d'étude de classification à partir des essais en vraie grandeur*, Colloque international sur le compactage, Paris, avril, vol. I, p. 51-56.
- [48] Kolmayer R., (1970), *Contribution à l'étude du compactage par vibration des matériaux pulvérulents*, thèse de Docteur-ingénieur, Université de Grenoble.
- [49] Kobori T., (1962), *Dynamic Responda of rectangular foundations on an elastic half-space*. Proc. Japanese National Symposium on Earthquake Eng., p. 81-86.
- [50] Kunar R.R., Rodriguez-Ovejero L., (1980), *A model with non-reflecting boundaries for use in explicite soil-structure interaction analysis*, Earthquake Eng. and Structural Dynamics, Vol. 8, p. 361-374.
- [51] Lamb H., (1904), *On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid*, Philosophical transactions of the Royal Society, London, A 203.
- [52] Léger Ph., (1968), *Massif viscoélastique indéfini soumis à une charge roulante*, Annales des Ponts et Chaussées, janvier-février.
- [53] L'Hermite R., Tournon, (1948), *La vibration du béton frais*, Ann. I.T.B.T.P., N° 11, (cité dans [48]).
- [54] Le Tirant P., (1963), *Chargements répétés des sols, Influence de la densité sur le comportement des sols sous l'action des chargements répétés*, Comptes rendus de recherche S/Rh. 5 et S/Rh. 5 bis, L.C.P.C., Paris.
- [55] Levy C., (1980), *Contact Hertzien avec frottement*, Mémoire, C.N.A.M., février.
- [56] Lorenz H., (1953), *Elasticity and damping effects of oscillating bodies on soil*, Symposium on dynamic testing of soils, A.S.T.M.-S.T.P., N° 156, p. 113-123.
- [57] Lysmer J., (1965), *Vertical Motion of rigid footings*, Ph. D. dissertation, Univ. of Michigan, aug. (cité dans [75]).
- [58] Lysmer J., Kuhlemeyer R.L., (1969), *Finite dynamic model for infinite media*, J. Eng. Mech. Div., A.S.C.E., 95, p. 859-877.
- [59] Lysmer J., Waas G., (1972), *Shear waves in plane infinite structures*, J. Eng. Mech. Div., A.S.C.E., 98, p. 85-105.
- [60] Machet J.-M., (1976), *L'interprétation de l'efficacité des compacteurs vibrants*, Rapport de recherche L.C.P.C., N° 59, sept.
- [61] Machet J.-M., Sanejouand R., (1980), *Modèles mathématiques dans le domaine du compactage par vibration*, Colloque international sur le compactage, Paris, avril, vol. II, p. 651-657.

- [62]. Machet J.-M., Morel G., Valeux J.-C., (1976), *Compactage des graves bitumes au moyen des rouleaux vibrants*, Rapport de recherche N° 63, L.C.P.C.
- [63] Meirovitch L., (1975), *Elements of vibration analysis*, Mac Graw-Hill, 495 p.
- [64] Miller G.F., Pursey H., (1955), *On the partition of the energy between elastic waves in a semi-infinite solid*, Proc. Royal Society, London, A.V. 233, p. 55-69, (cité dans [75]).
- [65] Morz Z., Norris V.A., Zienkiewicz O.C., (1978), *An isotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading*, Int. J. for Numerical and Analytical Math. in Geomechanics, Vol. 2.
- [66] Mucci M., Baron J., (1969), *Premiers essais sur le comportement dynamique des chaussées en béton*, Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, N° 36, janvier-février.
- [67] Mucci M., Christory J.P., (1972), *Etude au vibreur lourd de l'effet d'injection sous des dalles de béton*, Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, N° 61, réf. 1220.
- [68] Prager W., (1958), *Problèmes de plasticité théorique*, Dunod, Paris.
- [69] Prange B. (Editeur), (1977), *Dynamic response and wave propagation in soils. Proc. Karlsruhe : dynamical methods in soil and rock mechanics*, Tome 1, sept., Balkema/Rotterdam.
- [70] Quibel A., (1980), *Le comportement vibratoire : trait d'union entre le choix des paramètres et l'efficacité d'un rouleau vibrant*, Colloque international sur le compactage, Paris, avril, vol. II, p. 671-676.
- [71] Quibel A., Froumentin M., Morel G., (1981), *Le vibreur : l'influence des paramètres d'un rouleau vibrant, sur l'efficacité du compactage*, Rapport de recherche L.P.C. à paraître.
- [72] Quibel A., Froumentin M., (1980), *Influence des paramètres d'un rouleau vibrant sur son efficacité*, Colloque international sur le compactage, Paris, avril, vol. II, p. 677-682.
- [73] Quinlan P.M., (1953), *The elastic theory of soil dynamics*, Symposium on dynamic testing of soils, A.S.T.M.-S.T.P., N° 156, p. 3-34.
- [74] Richart F.E., Whitman R.V., (1967), *Comparison of footing vibration tests with theory*, J. Soil Mech. and Found. Div., Proc. A.S.C.E., Vol. 93, N° SM6, nov., p. 143-168.
- [75] Richart F.E., Woods R.D., Hall J.R., (1970), *Vibrations of soils and foundations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, p. 414.
- [76] Reissner E., (1936), *Stationäre, axialsymmetrische durch eines homogenen elastischen Halbraumes*, Ingenieur-Archiv., Vol. 7, Part. 6, Déc., pp. 381-396 (cité dans [75]).
- [77] Salençon J., (1974), *Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols*, Eyrolles, Paris.
- [78] Salençon J., (1978), *Calcul à la rupture et analyse limite*, Cours de l'Ecole nationale des ponts et chaussées, Paris.
- [79] Selig E.T., (1963), *Effect of vibration of sand*, Proc. on the 2d Pan. Conf. on S.M.F.E., Brésil.
- [80] Selvadurai A.P.S., (1979), *Elastic analysis of soil - Foundation interaction*, Elsevier Scientific Publishing Company, p. 543.
- [81] Shekhter O. Ia., (1848), *Comment tenir compte des propriétés d'inertie du sol dans le calcul des oscillations forcées des massifs de fondations*, Recueil du S.E.T. des Bases et Fondations, N° 12, U.R.S.S.
- [82] Silver M.L., Seed B., (1971), *Deformation characteristics of sands cyclic loading*, Journal, soil mechanics and foundations division, A.S.C.E., N° SM8, paper 8334, August, p. 1081-1097.
- [83] Smith W.D., (1974), *A non-reflecting plane boundary for wave propagation problems*, Journal of computational Physics, 15, p. 492-503.
- [84] Sung T.Y., (1953), *Vibrations in semi-infinite solids due to periodic surface loading*, Symposium on dynamic testing of soils, A.S.T.M.-S.T.P., N° 156, p. 35-63.

- [85] Tassas C.G., (1979), *Etude générale de vibrations de fondations par la méthode des éléments finis*, Thèse de docteur-ingénieur, Ecole centrale de Paris, oct.
- [86] Thomson W.T., KOBORI T., (1963), *Dynamical compliance of rectangular foundations on an elastic half-space*, J. Appl. Mech., Trans. A.S.M.S., Dec., p. 579-584.
- [87] Touret J.P., (1977), *Comportement d'un sable soumis à des vibrations au cours d'un essai triaxial*, Thèse de docteur-ingénieur, Université Claude-Bernard, Lyon.
- [88] Vakili J., (1968), *Dynamique d'un semi-espace viscoélastique*, Thèse de docteur-ingénieur, Université de Paris VI, nov.
- [89] Vakili J., (1969), *Aspect théorique de la dynamique des massifs semi-infinis*, Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, N° 40, sept.-oct., réf. 672.
- [90] Veletsos A.S., Verbic B., (1973), *Vibration of viscoelastic foundations*, Earthquake Engineering and structural dynamics, Vol. 2, p. 87-102.
- [91] Vermeer P.A., (1978), *A double hardening model for sand*, Géotechnique 28, N° 4.
- [92] Waas G., (1972), *Analysis method for footing vibrations through layered media*, Ph. D., University of California Berkeley, june.
- [93] Walter A., (1979), *Numerical and experimental verification of the elastoplastic model of granular media*, Colloque franco-polonais, L.C.P.C., Paris, mars.
- [94] Warburton G.B., (1957), *Forced vibration of a body upon an elastic stratum*, J. Appl. Mech., Trans. A.S.M.E., Vol. 24, p. 55-58.
- [95] Whitman R.V., Ortigosa de Pablo P., (1968), *Densification of sand by vertical vibrations. Rep. N° 4 - Repeated load and vibration tests upon sand*, Dept. of civil Eng., Massachusetts Inst. Of Tech. paper N° T68-5, soils Pub. N° 222, Aug. (cité dans [75]).
- [96] White W., Valliappan S., Lee I.K., (1977), *Unified Boundary for finite dynamic models*, J. Eng. Mech. Div., A.S.C.E., 103, p. 949-964.
- [97] Youd T.L., (1967), *Reduction of critical void ratio during steady-state vibrations*, Proc. Int. Symp. on wave propagation and dynamic properties of earth materials, New Mexico, (cité dans [87]).
- [98] Zienkiewicz O.C., (1971), *The finite element method in engineering science*, Mac Graw-Hill.
- [99] Zoeppritz K., (1919), *Nach d. Königl. Gesell d. Wissen, z. Gottingen. Math.-Phys.*, Berlin, p. 66-94, (cité dans [30]).
- [100] Duc J., Bellet D., (1977), *Problèmes d'élasticité*, Cepadues-Edition, 225 P.
- [101] Farzaneh O., (1978), *Compactage des sols par vibration. Comportement d'un rouleau vibrant*. Rapport de Travail de Fin d'Etudes, E.N.P.C., Juin.
- [102] Hunter S.C., (1961), *The Rolling Contact of a Rigid Cylinder with a Viscoelastic Space*. Journal of Applied Mechanics, Dec. p. 611-618.
- [103] Karafiath L.L., Nowatzki E.A., (1978), *Soil Mechanics for Off-Road Vehicle Engineering*. Trans. Tech. Publications, 515 P.
- [104] Landau L., Lifchitz E., (1967), *Théorie de l'Elasticité*. Editions MIR, Moscou, 206 P.
- [105] Morland L.W., (1962), *A Plane Problem of Rolling Contact in Linear Viscoelasticity Theory*. Journal of Applied Mechanics, June, p. 345-352.
- [106] Muskhelishvili N.I., (1953), *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. (Traduit du russe par J.R.M. Radok), P. Noordhoff Ltd., Groningen-Holland, 704 P.
- [107] Hertz H., (1882), *Über die berührung fester elastischer körper*. Journal f.d. reine a. angew. Math., 92.
- [108] Solomon L., (1968), *Elasticité Linéaire*. Masson et Cie Editeurs, Paris, 742 P.
- [109] Timoshenko S., (1918), *Théorie de l'Elasticité*. (Traduit de l'anglais par Ch. Beranger) Librairie Polytechnique, Paris.